Jurnal Penelitian Sains ; hal 14 - 22
No.11. April 2002 ISSN: 1410-7058

INTERVAL PREDIKSI BOOTSTRAP UNTUK PROSES AR(1) MELALUI EKSPANSI EDGEWORTH

Bambang Suprihatin
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya

ABSTRAK

Misal $\{Y_t, t = 0,1,2,\ldots\}$ adalah proses autoregresif orde satu atau AR(1) yang stasioner. Asumsikan proses tersebut adalah Gaussian dengan parameter waktu diskrit. Misal diberikan data berukuran n, yakni $y_1, y_2, \cdots, y_n$. Selanjutnya, akan dikaji interval prediksi untuk y_{n+k}, dengan k tertentu dan $k > 0$, yang memuat y_{n+k} dengan peluang $1-\alpha$. Tujuan dari penelitian ini adalah mengkonstrusksi prediksi interval bootstrap dan prediksi satu langkah ke depan (one-step-ahead), yakni y_{n+1}. Hasil-hasil yang diperoleh akan dibuktikan dengan menggunakan ekspansi Edgeworth dan juga inversnya, yakni ekspansi Cornish-Fisher.

PENDAHULUAN

Prakiraan atau *forecasting* untuk nilai data dari pengamatan yang akan datang adalah salah satu aplikasi yang penting didalam analisis deret waktu (*time series*). Khususnya, didalam prakiraan selalu bertujuan menentukan penaksir yang terbaik, yakni memiliki sifat tak bias, konsisten dan variansinya kecil. Untuk menjelaskan tingkat keakuratan dari prakiraan tersebut, perlu didefinisikan *prediksi error*, yang dianggap sebagai ukuran dari ketidaktentuan dari suatu prakiraan. Salah satu permasalahan yang erat kaitannya dengan hal ini adalah mengkonstruksi suatu interval prediksi untuk pengamatan yang akan datang.

Misal $\{y_t, t = 0,1,2,\ldots\}$ adalah barisan data deret waktu yang memenuhi proses autoregresif orde satu atau disingkat AR (1), yakni, apabila $\{y_t, t = 0,1,2,\ldots\}$ memenuhi persamaan $Y_t = Y_{t-1} + a_t$ dengan $\{a_t\}$ adalah barisan variabel acak *white noise*. Asumsikan $\{Y_t, t \in T\}$ adalah Gaussian stasioner dengan mean nol.

Menurut asumsi bahwa $\{Y_t, t \in T\}$ Gaussian, maka untuk setiap $m > 1$, berlaku $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m) \sim N(\mu_m(\beta), \Sigma_m(\beta))$ dimana $\beta \in R^m$. Syarat kestasioneran lemah (*weakly stationary condition*) untuk proses AR (1) adalah $\lambda < 1$ (Cryer, 1986).

Misal diberikan data berukuran *n*, yakni $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Selanjutnya akan dikaji interval prediksi untuk y_{n+k}, dengan *k* tertentu dan $k > 0$, yang memuat y_{n+k} dengan peluang $1-\alpha$. Didalam mengkonstruksi interval prediksi, digunakan teknik-teknik standard yang sering dipakai untuk menentukan interval kepercayaan. Namun, teknik-teknik standard ini hanya efektif digunakan untuk data sampel yang telah diamati berukuran relatif besar (Kabaila dan Zhisong, 1998). Untuk data sampel yang berukuran kecil, penaksir distribusi dari parameter akan bias. Oleh karenanya, penerapan metode resampling bootstrap parametrik akan lebih efektif menghasilkan interval prediksi yang lebih baik atau lebih akurat. Penerapan bootstrap parametrik tersebut berdasarkan pada kuantitas dari $y_{n+k} - \hat{y}(\beta_n^*, n)$ (Stine, 1987), dimana $\hat{y}(\hat{\beta}_n^*, n) = E(y_{n+k} | y_n, y_{n-1}, \ldots, y_1)$ dengan $\hat{\beta}_n^*$ adalah taksiran bootstrap untuk β.

METODOLOGI

1. Plot data yang diberikan. Jika data tidak stasioner, lanjutkan langkah ke-2, dan jika tasioner langsung lanjutkan langkah ke-3.
2. Transformasikan faktor-faktor yang menyebabkan data menjadi tidak stasioner, misalnya musiman (*seasonal*) dan *trend*, agar menjadi stasioner.
3. Hitung atau plot autokorelasi (ACF) dan autokorelasi parsial (PACF) dari data yang stasioner, sebut data itu $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.
4. Jika ACF menurun secara eksponensial dan PACF *cuts off* di *lag* 1, maka data tersebut adalah AR(1) (Wei, 1990), yakni memenuhi

   $Y_t = \lambda Y_{t-1} + a_t$, untuk setiap $t \in T$.

   Asumsikan $\{a_t\} \sim N(0, \sigma^2)$. Disini $\beta = (\lambda, \sigma^2)$. Jika data tidak AR(1), maka langkah berhenti.

5. Data **Y**= (y_1, $y_2, \ldots, y_n$) di bootstrap sebanyak B kali, diperoleh pseudo data $\mathbf{Y}^*$.
6. Hitung taksiran bootstrap $\hat{\beta}_n^* = \left(\hat{\lambda}_n^*, \hat{\sigma}_n^{2*}\right)$.
7. Hitung taksiran bootstrap $\hat{y}_{n+k}\left(\hat{\beta}_n^*, n\right)$ berdasarkan $\mathbf{Y}^*$.
8. Pilih α cukup kecil, misalnya 1% atau 5%.
9. Tentukan konstanta c sedemikian hingga
$$P\left(\left|\frac{Y_{n+k} - \hat{Y}\left(\hat{\beta}_n^*, n\right)}{s\left(\hat{\beta}_n^*, n\right)}\right| \le c\right) = 1 - \alpha ,$$
dimana $s\left(\hat{\beta}_n^*, n\right) = \hat{\sigma}_n^*$.
10. Didapatlah interval prediksi bootstrap
$$\left[\hat{Y}\left(\hat{\beta}_n^*, n\right) - cs\left(\hat{\beta}_n^*, n\right), \hat{Y}\left(\hat{\beta}_n^*, n\right) + cs\left(\hat{\beta}_n^*, n\right)\right]$$
.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Mengkonstruksi Interval Prediksi Bootstrap

Misal diberikan data berukuran n, yakni **Y** = (y_1, $y_2, \ldots, y_n$). Misal **Y** memenuhi proses Gaussian, yakni untuk setiap $m > 1$, berlaku

$(y_1, y_2, \ldots, y_n) \sim N(\mu_m(\beta), \Sigma_m(\beta))$,

dimana $\beta \in \mathbf{R}^m$. Dalam tulisan ini, pembahasan dibatasi bahwa **Y** memenuhi proses AR(1), yakni memenuhi

$Y_t = \lambda Y_{t-1} + a_t$, untuk setiap $t \in T$.

Asumsikan $E(y_t) = 0$ dan $\{a_t\} \sim N(0,\sigma^2)$. Disini, $\beta = (\lambda, \sigma^2)$.

Selanjutnya, akan dikonstruksi interval prediksi yang memuat y_{n+k} dengan peluang $1\text{-}\alpha$. Selanjutnya, definisikan

$\hat{y}(\beta, n) = E\{Y_{n+k} \mid y_1, y_2, \ldots, y_n\}$,

$s(\beta, n) =$
$$\sqrt{E\{(Y_{n+k} - \hat{Y}(\beta, n))^2 | y_1, y_2, \ldots, y_n\}} .$$

Jika β diketahui, maka dapat ditentukan interval "ideal" yang memuat y_{n+k} dengan peluang $1\text{-}\alpha$ sebagai berikut. Perhatikan bahwa

$$Z = \frac{y_{n+k} - \hat{y}(\beta, n)}{s(\beta, n)} \sim N(0,1).$$

Dan definisikan c_α sebagai solusi dari $P(|z| \le c_\alpha) = 1 - \alpha$. Sekarang,

$$P\left(\left|\frac{Y_{n+k} - \hat{Y}(\beta, n)}{s(\beta, n)}\right| \le c_\alpha\right)$$
$$= P\{\hat{y}(\beta, n) - c_\alpha(\beta, n), \hat{y}(\beta, n) + c_\alpha(\beta, n)\}$$
$$= 1 - \alpha.$$

Sehingga diperoleh

$I_n(\beta) = [\,\hat{y}(\beta,n) - c_\alpha s(\beta,n)\,,\ \hat{y}(\beta,n) + c_\alpha s(\beta,n)]$.

Namun, dalam prakteknya, interval ini tidak bisa digunakan karena β tidak diketahui. Oleh karena itu, perlu dikonstruksi interval prediksi yang diperoleh dengan mengganti β dengan penaksir $\hat{\beta}_n$ didalam $I_n(\beta)$ untuk memperoleh $I_n(\hat{\beta}_n)$.

Berikut adalah dua cara yang digunakan untuk menaksir interval prediksi $I_n(\hat{\beta}_n)$.

1. Bandingkan titik-titik ujung interval $I_n(\hat{\beta}_n)$ dengan titik-titik ujung interval $I_n(\beta)$.
2. Bandingkan $P\{y_{n+k} \in I_n(\hat{\beta}_n)\}$ dengan $1\text{-}\alpha$.

Pandang suatu model $\hat{\beta}_n = \beta + O_p(n^{-1/2})$. Dengan demikian, titik ujung $I_n(\hat{\beta}_n)$ berbeda dengan titik-titik ujung $I_n(\beta,n)$ sebesar $O_p(n^{-1/2})$. Definisi untuk notasi O_p, bisa dilihat pada Shao dan Dongsheng (1995). Lebih lanjut, interval prediksi $I_n(\hat{\beta}_n)$ hanya efektif untuk sampel berukuran besar. Sementara itu, untuk sampel yang berukuran kecil, akan diterapkan bootstrap parametrik untuk memperoleh interval prediksi yang lebih baik. Disini, parameter β ditaksir oleh penaksir bootstrap $\hat{\beta}_n^*$. Ide dasar dari metode bootstrap adalah membangkitkan data tiruan (*pseudo data*)$\mathbf{Y}^*$ dari data terobservasi $\mathbf{Y}$.

Misal $\hat{y}(\hat{\beta}_n^*, n)$ adalah taksiran untuk y_{n+k} yang dihitung berdasarkan taksiran bootstrap $\hat{\beta}_n^*$. Definisikan $d(\beta)$ sebagai solusi dari

$$P\left(\left|Y_{n+k} - \hat{Y}(\hat{\beta}_n^*, n)\right| \le d\right) = 1 - \alpha .$$

Jika $d(\beta)$ diketahui, maka dapat ditentukan interval "ideal" yang memuat y_{n+k} dengan peluang $1\text{-}\alpha$ sebagai berikut .

$$J_n(\beta) = \left[\hat{y}(\hat{\beta}_n^*, n) - d(\beta), \hat{y}(\hat{\beta}_n^*, n) + d(\beta)\right].$$

Interval prediksi bootstrap diperoleh dengan mengganti β dengan penaksir bootstrap $\hat{\beta}_n^*$ didalam $J_n(\beta)$ untuk memperoleh $J_n(\hat{\beta}_n^*)$. Lebih lanjut, dengan menggunakan ekspansi Edgeworth, dapat dibuktikan bahwa

$$P\left(\left|Y_{n+k}-\hat{Y}\left(\hat{\beta}_n^*,n\right)\right|\le d\right)=\Phi\left(\frac{d}{s(\beta,n)}\right)-\Phi\left(\frac{-d}{s(\beta,n)}\right)+R_n(\beta), \tag{1}$$

dimana $R_n(\beta)=O(n^{-1})$. Buktinya adalah sebagai berikut. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
&P\left(\left|Y_{n+k}-\hat{Y}\left(\hat{\beta}_n^*,n\right)\right|\le d\right)\\
&=P\left(\frac{\left|Y_{n+k}-\hat{Y}\left(\hat{\beta}_n^*,n\right)\right|}{s(\beta,n)}\le\frac{d}{s(\beta,n)}\right)\\
&=P\left(\frac{-d}{s(\beta,n)}\le\frac{Y_{n+k}-\hat{Y}\left(\hat{\beta}_n^*,n\right)}{s(\beta,n)}\le\frac{d}{s(\beta,n)}\right)\\
&=P\left(\frac{Y_{n+k}-\hat{Y}\left(\hat{\beta}_n^*,n\right)}{s(\beta,n)}\le\frac{d}{s(\beta,n)}\right)-P\left(\frac{Y_{n+k}-\hat{Y}\left(\hat{\beta}_n^*,n\right)}{s(\beta,n)}\le\frac{-d}{s(\beta,n)}\right).
\end{aligned} \tag{2}$$

Karena $\left\{Y_{n+k}-\hat{Y}\left(\hat{\beta}_n^*,n\right)/s(\beta,n)\right\}\sim N(0,1)$, maka dengan menggunakan ekspansi Edgeworth diperoleh

$$\begin{aligned}
&P\left\{\left(\left(Y_{n+k}-\hat{Y}\left(\hat{\beta}_n^*,n\right)\right)/s(\beta,n)\right)\le\pm d/s(\beta,n)\right\}\\
&=\Phi\left(\frac{\pm d}{s(\beta,n)}\right)+n^{-1/2}p_1\left(\frac{\pm d}{s(\beta,n)}\right)\phi\left(\frac{\pm d}{s(\beta,n)}\right)+\cdots+n^{-j/2}p_j\left(\frac{\pm d}{s(\beta,n)}\right)\phi\left(\frac{\pm d}{s(\beta,n)}\right)+\cdots
\end{aligned}$$

. Karena polinom p_j adalah fungsi genap untuk j ganjil, maka untuk setiap j ganjil berlaku

$$p_j\left(\frac{d}{s(\beta,n)}\right)-p_j\left(\frac{-d}{s(\beta,n)}\right)=2p_j\left(\frac{d}{s(\beta,n)}\right).$$

Perhatikan juga bahwa $\phi(-d/s(\beta,n))=\phi(d/s(\beta,n))$. Akibatnya, persamaan terakhir dari (2) menjadi

$$\Phi(d/s(\beta,n)) - \Phi(-d/s(\beta,n))$$
$$+2n^{-1}p_2\left(\frac{d}{s(\beta,n)}\right)\phi\left(\frac{d}{s(\beta,n)}\right)+2n^{-2}p_4\left(\frac{d}{s(\beta,n)}\right)\phi\left(\frac{d}{s(\beta,n)}\right)+\cdots$$
$$=\Phi\left(\frac{d}{s(\beta,n)}\right)-\Phi\left(\frac{-d}{s(\beta,n)}\right)+O(n^{-1})$$

Sehingga bukti sudah lengkap.

Dari sini diperoleh, $d(\beta) = cs(\beta,n)+O(n^{-1})$. Karena $\hat{\beta}_n = \beta + O_p(n^{-1/2})$, dan dengan menggunakan definisi dari notasi O_p, maka diperoleh

$d(\hat{\beta}^*_n)$ - $d(\beta) = O_p(n^{-1/2})$. (3)

Dengan demikian, perbedaan titik-titik ujung $J_n(\hat{\beta}^*_n)$ dengan titik-titik ujung $J_n(\beta_n)$ adalah sebesar $O_p(n^{-1/2})$. Atau dengan kata lain, peluang *coverage*

$P(y_{n+k} \in J_n(\hat{\beta}^*_n)) = 1-\alpha + O_p(n^{-1/2})$.

Bukti formal dari hasil ini dapat dilihat pada pembuktian Teorema (1). Perlu dicatat bahwa, besar perbedaan ini adalah berorde sama dengan perbedaan antara titik-titik ujung $I_n(\beta)$ dan $I_n(\hat{\beta}_n)$.

Interval prediksi bootstrap yang lain diperoleh apabila bootstrap parametrik diterapkan pada interval prediksi versi *studentized*. Definisikan $c(\beta)$ adalah salusi dari

$$P\left(\left|\frac{Y_{n+k}-\hat{Y}(\hat{\beta}^*_n,n)}{s(\hat{\beta}^*_n,n)}\right| \le c\right) = 1-\alpha$$

Seperti biasa, jika $c(\beta)$ diketahui, maka dapat ditentukan interval "ideal" yang memuat Y_{n+k} dengan peluang $1-\alpha$, yakni

$K_n(\beta)=$
$$\left[\hat{Y}(\hat{\beta}^*_n,n)-c(\beta)s(\hat{\beta}^*_n,n), \hat{Y}(\hat{\beta}^*_n,n)+c(\beta)s(\hat{\beta}^*_n,n)\right]$$

Interval prediksi bootstrap diperoleh dengan mengganti β dengan penaksir $\hat{\beta}^*_n$ didalam $K_n(\beta)$ untuk memperoleh $K_n(\hat{\beta}^*_n)$.

Selanjutnya, dapat dibuktikan bahwa

$$P\left(\left|\frac{Y_{n+k}-\hat{Y}(\hat{\beta}^*_n,n)}{s(\hat{\beta}^*_n,n)}\right| \le c\right) = \Phi(c)-\Phi(-c)+R'_n(\beta) \quad (4)$$

dimana $R'_n(\beta) = O_p(n^{-1})$. Buktinya analog dengan pembuktian persamaan (1). Selanjutnya, diperoleh

$c(\hat{\beta}^*_n)$-$c(\beta) = O_p(n^{-3/2})$, (5) yang buktinya dapat dilihat pada pembuktian Teorema 1. Dengan demikian, peluang *coverage*

$P\left(y_{n+k} \in K_n\left(\hat{\beta}_n^*\right)\right) = 1 - \alpha + O_p(n^{-3/2})$.

Jadi, perbedaan antara titik-titik ujung $K_n(\hat{\beta}_n^*)$ dan $K_n(\beta)$ berorde lebih rendah dibandingkan dengan orde dari perbedaan antara titik-titik ujung $J_n(\hat{\beta}_n^*)$ dan $J_n(\beta)$. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa, prediksi interval bootstrap yang diterapkan pada prediksi error versi *studentized* adalah lebih baik/efektif dibandingkan dengan yang *non-studentized*.

Berikut akan dibahas mengenai prediksi satu langkah kedepan (one-step-ahead prediction) untuk kasus khusus dari model time series, yakni preses AR(1).

Prediksi Satu langkah Ke Depan untuk Proses AR(1)

Misal $\{Y_t\ ,\ t \in T\}$ adalah proses Gaussian stasioner yang memenuhi proses AR(1), yakni

$Y_t = \lambda Y_{t-1} + a_t$, untuk setiap $t \in T$.

Asumsikan $E(Y_t) = 0$ dan $\{a_t\} \sim N(0, \sigma^2)$. Syarat kestasionerannya adalah $|\lambda| < 1$. Selanjutnya, akan dikaji prediksi satu langkah ke depan, yakni y_{n+1}.

Perhatikan bahwa untuk kasus ini,

$\hat{y}(\beta, n) = E\{Y_{n+1} | y_1, y_2, \ldots, y_n\}$

$= E\{\lambda Y_n + a_t | y_1, y_2, \ldots, y_n\} = \lambda Y_n$,

$s(\beta, n) =$

$\sqrt{E\left\{\left(Y_{n+1} - \hat{Y}(\beta, n)\right)^2 | y_1, y_2, \ldots, y_n\right\}} = \sigma$.

Setelah dilakukan bootstrap diperoleh

$\hat{y}\left(\hat{\beta}_n^*, n\right) = \hat{\lambda}_n^* y_n$

dan

$s\left(\hat{\beta}_n^*, n\right) = \hat{\sigma}_n^*$.

definisikan $X_t = Y_t / \sigma$ untuk setiap $t \in T$, sehingga

$X_t = \lambda X_{t-1} + \varepsilon_t$,

dengan $\varepsilon_t \sim N(0,1)$. Misal $\hat{\lambda}_n^*$ dan $\hat{\sigma}_n^{2*}$ adalah berturut-turut penaksir bootstrap untuk λ dan σ^2.

Berikut adalah teorema yang berkaitan erat dengan hasil-hasil pada persamaan (3) dan (5), dan merupakan rangkuman dari pembahasan ini.

Teorema 1 *Misal $d(\beta)$ dan $c(\beta)$ adalah berturut-turut solusi dari*

Jurnal Penelitian Sains ; hal 14 - 22
No.11, April 2002 ISSN: 1410-7058

$$P\left(\left|Y_{n+1}-\hat{\lambda}_n^* Y_n\right| \le d\right)=1-\alpha$$
$$dan P\left(\left|\left\{Y_{n+1}-\hat{\lambda}_n^* Y_n\right\}/\hat{s}_n^*\right| \le c\right)=1-\alpha, maka$$
$$d\left(\hat{\beta}_n^*\right)-d(\beta)=O_p\left(n^{-1/2}\right),$$
$$dan \ \ c\left(\hat{\beta}_n^*\right)-c(\beta)=O_p\left(n^{-3/2}\right)$$

Bukti. Disini, akan dibuktikan pernyataan kedua. Pernyataan pertama dibuktikan dengan cara yang sama. Untuk itu, tulis

$$T=\frac{Y_{n+1}-\hat{\theta}_n Y_n}{\hat{s}_n}.$$

Perhatikan bahwa

$1\text{-}\alpha \ = P(\,|T|\le c) \ = P(-c\le T\le c)$

$= P(T\le c) - P(T\le -c).$ (6)

Dengan menggunakan ekspansi Edgeworth, persamaan (6) menjadi

$$\Phi(c)+n^{-1/2}p_1(c)\phi(c)+n^{-1}p_2(c)\phi(c)+\cdots$$
$$-\left\{\Phi(-c)+n^{-1/2}p_1(-c)\phi(-c)+n^{-1}p_2(-c)\phi(-c)+\cdots\right\}$$

Karena p_j adalah fungsi genap untuk j ganjil, maka untuk setiap j ganjil berlaku $p_j(c)$ -$p_j(-c)$ = 0. Juga, karena p_j adalah fungsi ganjil untuk j genap, maka untuk setiap j genap berlaku $p_j(c) - p_j(-c) = 2\,p_j(c)$. Selain itu, juga berlaku $\phi(-c) = \phi(c)$ dan $\Phi(-c)=1-\Phi(c)$.

Sehingga, diperoleh

$$1-\alpha=2\Phi(c)-1+2\left\{n^{-1}p_2(c)\phi(c)+n^{-2}p_4(c)\phi(c)+\cdots\right\},$$

atau

$$1-\frac{\alpha}{2}=\Phi(c)+n^{-1}p_2(c)\phi(c)+n^{-2}p_4(c)\phi(c)+\cdots$$

Selanjutnya, dengan menggunakan ekspansi Cornish-Fisher diperoleh

$$c(\beta) = z_\xi + n^{-1}p_{21}(z_\xi) + n^{-2}p_{41}(z_\xi) + \ldots, \quad (7)$$

dimana $\xi = 1\text{-}\alpha/2$. Analog dengan persamaan (7), diperoleh

$$c(\hat{\beta}_n^*) = z_\xi + n^{-1}\,\hat{p}_{21}\ (z_\xi) + n^{-2}\,\hat{p}_{41}\ (z_\xi) + \ldots. \quad (8)$$

Menurut Hall (1992, hal. 69), diperoleh hubungan

$p_{21}(x) = -p_2(x)$ dan $\hat{p}_j - p_j = O_p(n^{-1/2})$.

Akibatnya, jika persamaan (7) dikurangkan ke persamaan (8), maka diperoleh

$$c(\hat{\beta}_n^*) - c(\beta) = n^{-1}\{\,\hat{p}_{21}\ (z_\xi) + p_{21}(z_\xi)\,\} + n^{-2}\{\,\hat{p}_{41}\ (z_\xi) + p_{41}(z_\xi)\} + \ldots$$
$$= -n^{-1}\{\,\hat{p}_2\ (z_\xi) + p_2\,(z_\xi)\,\}O_p(n^{-5/2})$$
$$= O_p(n^{-3/2}),$$

sehingga bukti sudah lengkap.

$$P\left(\left|Y_{n+1}-\hat{\lambda}_n^* Y_n\right| \le d\right)=1-\alpha$$
$$dan P\left(\left|\left\{Y_{n+1}-\hat{\lambda}_n^* Y_n\right\}/\hat{s}_n^*\right| \le c\right)=1-\alpha, maka$$
$$d\left(\hat{\beta}_n^*\right)-d(\beta)=O_p\left(n^{-1/2}\right),$$
$$dan \quad c\left(\hat{\beta}_n^*\right)-c(\beta)=O_p\left(n^{-3/2}\right)$$

Bukti. Disini, akan dibuktikan pernyataan kedua. Pernyataan pertama dibuktikan dengan cara yang sama. Untuk itu, tulis

$$T=\frac{Y_{n+1}-\hat{\theta}_n Y_n}{\hat{s}_n}.$$

Perhatikan bahwa

$1-\alpha \quad = P(\,|\,T\,|\le c) \quad = P(-c\le T\le c)$

$= P(T\le c) - P(T\le -c). \qquad (6)$

Dengan menggunakan ekspansi Edgeworth, persamaan (6) menjadi

$$\Phi(c)+n^{-1/2}p_1(c)\phi(c)+n^{-1}p_2(c)\phi(c)+\cdots$$
$$-\left\{\Phi(-c)+n^{-1/2}p_1(-c)\phi(-c)+n^{-1}p_2(-c)\phi(-c)+\cdots\right\}$$

Karena p_j adalah fungsi genap untuk j ganjil, maka untuk setiap j ganjil berlaku $p_j(c) - p_j(-c) = 0$. Juga, karena p_j adalah fungsi ganjil untuk j genap, maka untuk setiap j genap berlaku $p_j(c) - p_j(-c) = 2\,p_j(c)$. Selain itu, juga berlaku $\phi(-c) = \phi(c)$ dan $\Phi(-c)=1-\Phi(c)$. Sehingga, diperoleh

$$1-\alpha=2\Phi(c)-1+2\left\{n^{-1}p_2(c)\phi(c)+n^{-2}p_4(c)\phi(c)+\cdots\right\},$$

atau

$$1-\frac{\alpha}{2}=\Phi(c)+n^{-1}p_2(c)\phi(c)+n^{-2}p_4(c)\phi(c)+\cdots$$

Selanjutnya, dengan menggunakan ekspansi Cornish-Fisher diperoleh

$$c(\beta) = z_\xi + n^{-1}p_{21}(z_\xi) + n^{-2}p_{41}(z_\xi) + \ldots, \qquad (7)$$

dimana $\xi = 1-\alpha/2$. Analog dengan persamaan (7), diperoleh

$$c(\hat{\beta}_n^*) = z_\xi + n^{-1}\hat{p}_{21}(z_\xi) + n^{-2}\hat{p}_{41}(z_\xi) + \ldots. \qquad (8)$$

Menurut Hall (1992, hal. 69), diperoleh hubungan

$p_{21}(x) = -p_2(x)$ dan $\hat{p}_j - p_j = O_p(n^{-1/2})$.

Akibatnya, jika persamaan (7) dikurangkan ke persamaan (8), maka diperoleh

$$c(\hat{\beta}_n^*) - c(\beta) = n^{-1}\{\hat{p}_{21}(z_\xi) + p_{21}(z_\xi)\} + n^{-2}\{\hat{p}_{41}(z_\xi) + p_{41}(z_\xi)\} + \ldots$$
$$= -n^{-1}\{\hat{p}_2(z_\xi) + p_2(z_\xi)\}O_p(n^{-5/2})$$
$$= O_p(n^{-3/2}),$$

sehingga bukti sudah lengkap.

Jurnal Penelitian Sains ; hal 14 - 22
No.11. April 2002 ISSN: 1410-7058

KESIMPULAN

1. Metode bootstrap parametrik yang diterapkan pada prediksi error versi *studentized*, menghasilkan interval prediksi yang lebih baik bila dibandingkan dengan versi *non-studentized*.
2. Untuk suatu model $\hat{\beta}_n = \beta + O_p(n^{-1/2})$, diperoleh peluang *coverage*

   $P\left(y_{n+k} \in J_n\left(\hat{\beta}_n^*\right)\right) = 1\text{-}\alpha + O_p(n^{-1/2})$,

   dan

   $P\left(y_{n+k} \in K_n\left(\hat{\beta}_n^*\right)\right) = 1\text{-}\alpha + O_p(n^{-3/2})$.

DAFTAR PUSTAKA

Cryer, J. D.,*Time Series Analysis*, PWS-KENT Publishing, Boston, 1986.

Hall, P., *The Bootstrap and Edgeworth Expansion*, Springer-Verlag, New York, 1992.

Kabaila, P. and Zhisong He, On Bootstrap Prediction Intervals for Gaussian Time Series, *Technical Report*, **No. 24**, Australia, 1998.

Shao, J. and Dongsheng Tu, *The Jackknife and Bootstrap*, Springer-Verlag, New York, 1995.

Stine, R. A., Estimating Properties of Autoregressive Forecast, *J. Am. Statist. Assoc.*, **No. 82**, page 1072-1078, 1987.

Wei, W. W. S., *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods*, Addison Wesley, California, 1990.