METODE KONVOLUSI DALAM MENGHITUNG PELUANG KEBANGKRUTAN SUATU PERUSAHAAN ASURANSI

Yuli Andriani

Abstract : *Calculating ruin probability is required by Insurer in designing portfolio for knowing risk values in portfolio. Convolution method in calculating ruin probability focused is surplus process that is U_n. U_n only depends on U_{n-1} state. Then convolution method is expanded by evaluating ruin probability of finite time discrete horizon. while it was capability using this method, all random variables of distribution must be used discrete.*

Keywords *: Surplus, peluang kebangkrutan, konvolusi*

PENDAHULUAN

Teori kebangkrutan (ruin) secara teori dapat dihitung atau diprediksi melalui peluang ruin. Peluang kebangkrutan yaitu peluang terjadinya kebangkrutan pertama kali terjadi pada suatu perusahaan asuransi jika dilihat dari cadangan awal (modal), harga premi dan waktunya dalam jangka panjang sehingga cadangannya menjadi minus.

Perhitungan peluang kebangkrutan ini sangat dibutuhkan oleh setiap perusahaan asuransi dalam menyusun portofolio untuk suatu periode tertentu. Dengan adanya informasi tentang peluang ruin, perusahaan tersebut dapat mengetahui besarnya risiko yang terkandung pada portofolio yang sedang disusunnya. Dengan demikian perusahaan tersebut dapat menghindari adanya resiko kerugian yang cukup besar. Pengetahuan tentang distribusi dari klaim *aggregate* adalah suatu hal yang sangat penting. Selain dapat digunakan untuk mempelajari perilaku dari klaim, dapat juga digunakan sebagai model dalam meramalkan biaya asuransi untuk tahun-tahun berikutnya. Metode Konvolusi dapat digunakan dalam menghitung peluang bangkrut suatu perusahaan asuransi berdasarkan klaim *aggregate.*

TINJAUAN PUSTAKA

1. Fungsi Surplus

Salah satu kegunaan model matematika risiko kolektif jangka panjang ialah membentuk model matematika dari besarnya surplus dari satu portofolio pada suatu perusahaan asuransi dalam jangka panjang. Misalkan :

- *u* adalah modal awal atau surplus awal.
- Premi diperoleh secara kontinu dengan laju pertumbuhan konstan sebesar *c* persatuan waktu.
- Klaim aggregate yang telah dibayar mengikuti fungsi $S= X_1+ X_2,+ \ldots+ X_N$,

✉ Yuli Andriani, adalah Dosen Jurusan Matematika FMIPA Unsri

maka fungsi surplus didefinisikan : $U(t) = u + c\,t - S(t),\ t \geq 0$ (Kass, 2001).

Jadi surplus adalah selisih antara modal awal ditambah dengan premi yang diterima dengan klaim yang dibayarkan.

Misalkan rata-rata besar klaim adalah p_1. Karena λ menyatakan frekuensi klaim, maka $\lambda\ p_1$ dapat ditafsirkan sebagai ekspektasi pembayaran klaim persatuan waktu. Diasumsikan $c > \lambda\ p_1$."*The relative security loading* θ" didefinisikan melalui relasi :

$$c = (1+\theta)\lambda p_1 \qquad (1)$$

2. Peluang Kebangkrutan

Surplus bisa bernilai positif maupun negatif. Pada saat tertentu surplus bernilai negatif. Jika surplus bernilai negatif terjadi untuk pertama kalinya maka dikatakan telah terjadi kebangkrutan. Menghitung peluang terjadinya kebangkrutan sangatlah berguna dalam mengukur risiko keuangan atau finansial suatu perusahaan asuransi. Misalkan U(t) adalah fungsi surplus. Maka

$$T = \min\{t \text{ dan } U(t)<0\ ;\ t > 0\} \qquad (2)$$

menyatakan saat bangkrut dengan pengertian $T = \infty$ jika $U(t) \geq 0,\ \forall t > 0$. Peluang terjadinya kebangkrutan, jika dana awal ***u***, didefinisikan :

$$\Psi(u) = P(T < \infty) \qquad (3)$$

Dalam prakteknya akan lebih realistis jika kita mengamati peluang kebangkrutan untuk jangka waktu yang panjang tapi berhingga, misalkan *t*. Peluang terjadinya kebangkrutan sebelum waktu *t*, jika dana awal *u*, didefinisikan :

$$\Psi(u) = P(T<t) = P(U(s) < 0,\ 0 \leq s \leq t) \qquad (4)$$

Jika $\{U(t),\ t>0\}$ menyatakan proses surplus dengan $\{S(t),\ t \geq 0\}$ proses klaim *aggregate* yang berdistribusi Poisson Majemuk , dimana $c > \lambda\ p_1$. dan $c = (1+\theta)\lambda p_1$, maka untuk $u>0$:

$$\Psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)}|T < \infty]} \qquad (5)$$

R adalah koefisien penyesuaian ("*adjusment coefficient*"), yaitu bilangan positif terkecil yang memenuhi persamaan $M_{S(t)-ct}(r) = 1$, dimana $M_{S(t)-ct}(r)$ adalah fungsi pembangkit momen dari $S(t) - ct$ (Bowers,1997).

Kesulitan dalam menghitung peluang kebangkrutan, $\Psi(u)$ ialah mencari bentuk eksplisit dari $E[e^{-RU(T)}/\ T < \infty]$. Salah satu cara mengatasinya ialah dengan menghampiri nilai peluang kebangkrutan tersebut dengan batas atasnya yaitu e^{-Ru}.

Jika diasumsikan $P(0) = 0$, atau dengan kata lain tidak terjadi klaim negatif, maka untuk dana awal $u=0$, peluang surplus $U(t) < 0$ adalah :

$$\Psi(0) = \frac{1}{1+\theta} \qquad (6)$$

METODOLOGI

1. Analisa Proses surplus untuk waktu diskrit

2. Analisa peluang ruin dengan konvolusi.
3. Analisa kasus peluang ruin.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Proses Surplus untuk Waktu Diskrit

Misalkan c_n adalah premi yang diterima pada periode ke-n (dengan laju konstan $c>0$) dan misalkan S_n adalah kerugian yang dibayarkan oleh perusahaan pada periode ke-*n*. Surplus pada akhir periode ke-*n* adalah

$$U_n = u+(c_1 - S_1) + \ldots + (c_{n-1} - S_{n-1}) + (c_n - S_n)$$
$$= U_{n-1} + c_n - S_n \quad = U_{n-1} + W_n. \qquad (7)$$

karena state U_n hanya bergantung pada state U_{n-1}, maka proses $\{U_n, \ n=0,1,2,\ldots\}$ disebut proses Markov. Faktor bunga dan biaya operasi perusahaan tidak dimasukkan pada model proses surplus.

2. Evaluasi Peluang Ruin dengan Konvolusi

Pandang kembali persamaan (7), yaitu $U_n = U_{n-1} + W_n$. Untuk dapat menghitung peluang kebangkrutan, didefinisikan proses berikut ini

$$W_n^* = \begin{cases} 0, & U_{n-1}^* < 0 \\ W_n, & U_{n-1}^* \geq 0 \end{cases} \quad \text{dan}$$

$$U_n^* = U_{n-1}^* + W_n^* \qquad (8)$$

dimana proses tersebut dimulai dengan $U_0^* = u$. Ketika proses surplus U_n^* tersebut bernilai negatif, proses tersebut tidak diperbolehkan untuk kembali ke state non negatif sehingga kita hanya perlu memeriksa U_n^* pada periode ke-*n*.

Berikut ini akan dijabarkan metode konvolusi untuk mengevaluasi peluang kebangkrutan waktu diskrit finite horizon. Namun untuk dapat menggunakan metode ini, distribusi dari semua peubah acak yang digunakan haruslah diskrit. Jika tidak, suatu aproksimasi harus dibuat. Perhitungan pada kasus ini dilakukan secara rekursi. Andaikan dimiliki fungsi peluang dari U_{n-1}^* . Maka peluang kebangkrutan adalah,

$$\tilde{\Psi}(u, n-1) = \Pr[U_{n-1}^* < 0] \qquad (9)$$

dan distribusi dari surplus non negatif adalah

$$f_j = \Pr[U_{n-1}^* = u_j],$$
$$j = 1,2,3,\cdots,m, \qquad (10)$$

dimana $u_j \geq 0$ untuk setiap j dan u_m adalah nilai terbesar U_{n-1}^* yang mungkin. Diasumsikan bahwa untuk setiap U_{n-1}^* yang bernilai positif, distribusi dari W_n diketahui. Misalkan ,

$$g_{j,k} = \Pr[W_n = w_{j,k} \mid U_{n-1}^* = u_j]. \qquad (11)$$

Lalu kita dapatkan peluang kebangkrutan dengan konvolusi,

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}(u,n) &= \tilde{\Psi}(u,n-1) + \Pr[U_{n-1}^* \geq 0 \; dan \; U_{n-1}^* + W_n < 0] \\ &= \tilde{\Psi}(u,n-1) + \sum_{j=1}^{m} \Pr[U_{n-1}^* + W_n < 0 \,|\, U_{n-1}^* = u_j] \Pr[U_{n-1}^* = u_j] \\ &= \tilde{\Psi}(u,n-1) + \sum_{j=1}^{m} \Pr[u_j + W_n < 0 \,|\, U_{n-1}^* = u_j] \, f_j \\ &= \tilde{\Psi}(u,n-1) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{w_{j,k} < -u_j} g_{j,k} \, f_j \,. \end{aligned} \qquad (12)$$

Contoh

Andaikan *annual losses* suatu perusahaan asuransi bernilai 0,2,3, dan 6 dengan peluang masing-masing 0.4, 0.3, 0.2, dan 0.1. Andaikan perusahaan tersebut memiliki surplus awal 2, dan premi sebesar 2.5 dikumpulkan pada awal tahun. Hitung $\tilde{\Psi}(2,2)$!

Jadi dari soal diatas diketahui:

- U=2 dan c_n=2.5, dan $Pr[s=0]$ =0.4, $Pr[s=2]$ =0.3, $Pr[s=3]$ =0.2, $Pr[s=6]$ =0.1.

Perhitungan peluang ruin untuk tiap periode:

1. Periode tahun ke-0.

a) $\tilde{\Psi}(2,0)$ =0

b) $f_1 = \Pr[U_0^* = 2] = 1,$

2. Periode tahun ke-1

a) $W_n = c_n - S_n$

b)

c) $\tilde{\Psi}(2,1)$ =0.1

d) Nilai $u_j \geq 0$ yang baru adalah:

K	$w_{1,k}+u_1$	$g_{1,k}$
1	2.5+2=4.5	0.4
2	0.5+2=2.5	0.3
3	-1.5+2=0.5	0.2
4	-3.5+2=-1.5	0.1

J	u_j	f_j
1	0.5	0.2
2	2.5	0.3
3	4.5	0.4

3. Periode tahun ke-2

a) Tabel ($u+w$, g)

J	u_j	f_j	1	2	3	4
1	0.5	0.2	(3, 0.4)	(1, 0.3)	(-1, 0.2)	(-3, 0.1)
2	2.5	0.3	(5, 0.4)	(3, 0.3)	(1, 0.2)	(-1, 0.1)
3	4.5	0.4	(7, 0.4)	(5, 0.3)	(3, 0.3)	(1, 0.1)

b) $\tilde{\Psi}(2,2)$ = 0.1 + 0.2 (0.2) + 0.2 (0.1) +0.3 (0.1) = 0.19

KESIMPULAN

1. Ketika proses surplus U_n^* bernilai negatif, proses surplus tidak diperbolehkan untuk kembali ke state non negatif sehingga kita hanya perlu memeriksa U_n^* pada periode ke-*n*.
2. Hasil evaluasi diperoleh peluang kebangkrutan dengan metode Konvolusi yaitu

$$\tilde{\Psi}(u,n) = \tilde{\Psi}(u,n-1) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{w_{j,k} < -u_j} g_{j,k} \, f_j$$

DAFTAR PUSTAKA

Andriani, Y., 2004, Menghitung peluang ruin. Tesis S2 ITB. Tidak dipublikasikan.

Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C, Jones, D.A. and Nesbitt, C.J, (1997), *Actuarial Mathematics*. Ithasca, Ill.: Society of Actuaries,417-430.

Hogg, R.V., Craig,A.T., 1995, *Introduction to Mathematical Statistics*, 5th ed., Prentice-Hall, Inc, New jersey.

Kass,R., Goovaerts,M., Dhaene,J., Denuit, M.,2001, *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Klugman,S.A.,Panjer,H.H.,Willmot,G.E.,1998, *Loss Models, From to Data to Decisions*, Wiley Series in Probability and Statistics,John Wiley & Sons,Inc., USA.