

Perubahan Topologi Spasial di dalam Fisika

AKHMAD AMINUDDIN BAMA

Jurusan Fisika FMIPA, Universitas Sriwijaya, Sumatera Selatan, Indonesia

INTISARI: Dalam makalah ini dibahas mengenai dapat-tidaknya ruang-waktu fisis mengalami perubahan topologi spasial. Ruang topologis atau manifold yang tidak kompak selalu dapat dijadikan sebagai ruang-waktu fisis. Sementara manifold kompak dapat dijadikan sebagai ruang-waktu fisis hanya bila karakteristik Euler-nya sama dengan nol. Untuk ruang-waktu kompak tanpa batasan M berdimensi genap ($(d+1)$ genap) dengan $\Sigma_{\mathcal{I}}$ dan $\Sigma_{\mathcal{F}}$ adalah kobordan bak-ruang, perubahan topologi spasial dapat terjadi apabila karakteristik Euler bagi M sama dengan nol, $\chi(M) = 0$, sedangkan untuk $(d+1)$ ganjil, perubahan topologi dapat terjadi jika dipenuhi kaidah seleksi Reinhardt-Sorkin, yaitu $\chi(\Sigma_{\mathcal{I}}) = \chi(\Sigma_{\mathcal{F}})$. Meskipun dapat dilakukan pengeliminasian kaedah Reinhardt-Sorkin untuk dapat terjadinya perubahan topologi bagi ruang-waktu berdimensi ganjil, namun pengeliminasian itu masih menyisakan beberapa batasan yang cukup tegas. Batasan itu muncul terkait dengan kehadiran kurva bak-waktu tertutup (sepanjang ruang-waktu kompak) untuk setiap perubahan topologi yang terjadi.

KATA KUNCI: ruang-waktu fisis, perubahan topologi spasial, karakteristik Euler, kaedah Reinhardt-Sorkin

ABSTRACT: This paper discuss to whether or not a physical space-time come through spatial topology changes. A topological space or a noncompact manifold can always as physical space-time. While a compact manifold can be a physical space-time only if its Euler characteristic is zero. For a compact space-time without boundary M having even-dimension ($(d+1)$ is even) with $\Sigma_{\mathcal{I}}$ and $\Sigma_{\mathcal{F}}$ is a space-like cobordan, a spatial topology change can occur if the Euler characteristic of M is zero, $\chi(M) = 0$. Whereas for $(d+1)$ is odd, the topology change can occur if it obey the Reinhardt-Sorkin selection rule, namely $\chi(\Sigma_{\mathcal{I}}) = \chi(\Sigma_{\mathcal{F}})$. Although we can eliminate the Reinhardt-Sorkin selection rule in order to a topology change can occur for odd space-time dimension, the eliminating it still leaves some restrictions. The restrictions appear related to the presence of closed time-like curves (along the space-time is compact) for any topology changes that occur.

KEYWORDS: physical space-time, spatial topology change, Euler characteristics, Reinhardt-Sorkin rule

E-MAIL: akhmadbama@yahoo.com

September 2010

1 PENDAHULUAN

Di dalam makalah ini dibahas topik yang terkait dengan dapat-tidaknya ruang (atau ruang-waktu) fisis mengalami perubahan topologi¹.

Apakah perubahan topologi ruang (atau ruang-waktu) dapat terjadi di dalam fisika? Pertanyaan ini lebih umum daripada sekedar pertanyaan dapat-tidaknya ruang dibagi menjadi dua atau lebih ruang lain^[1]. Jika ruang dibagi-bagi maka jelas akan terjadi perubahan topologi. Meskipun demikian, tidak perlu harus terjadi sebaliknya. Dengan kata lain, perubahan topologi ruang tidak perlu harus ada pembagian ruang. Misalnya, perubahan topologi dari ruang tersambung sederhana menjadi tersambung tak sederhana, misalnya perubahan S^3 menjadi $S^1 \times S^1 \times S^1$,

¹Pada bahasan ini, istilah perubahan topologi yang dimaksud adalah perubahan topologi spasial.

tidak melibatkan pembagian ruang.

Beberapa pertanyaan berikut juga cukup penting untuk dikemukakan di sini terkait dengan sejumlah keadaan yang secara fisis kondisinya cukup berbeda. Misalnya, munculnya zarah topologis (geon) yang kehadirannya tidak lebih daripada munculnya ruang (atau ruang-waktu) yang mempunyai sifat topologis tertentu. Karena itu, jika dianggap zarah menempel di dalam ruang maka pertanyaan mengenai dapat-tidaknya cacah zarah berubah tak lebih dari pertanyaan apakah topologi ruang dapat berubah? Pertanyaan yang lebih provokatif lagi, dapatkah mesin-waktu dibangun? Membangun mesin-waktu berarti menciptakan kurva bak-waktu tertutup, katakanlah dengan menciptakan lubang cacing, karena itu, satu cara penciptaannya adalah dengan mengubah topologi ruang di dalam daerah terhingga, sehingga dapat dihasilkan kurva bak-waktu tertutup.

Akhirnya, pertanyaan dapat-tidaknya topologi ruang (ruang-waktu) berubah sangat diperhatikan dalam ranah gravitasi kuantum. Misalnya teori dawai, teori Kaluza-Klein, teori medan kuantum topologis, teori gravitasi kuantum Euclid, dan berbagai teori lain, sungguh tak dapat mengelak dari keharusan digunakannya konsep perubahan topologi.

2 PERUBAHAN TOPOLOGI SPASIAL; TINJAUAN MATEMATIS

Tinjauan matematis mengenai perubahan topologi telah banyak dikenal, baik oleh para matematikawan maupun fisikawan. Di dalam fasal ini akan diulas kembali beberapa hal penting yang terkait dengan perubahan topologi (secara matematis) sebagaimana yang telah disinggung di dalam makalah penulis^[2].

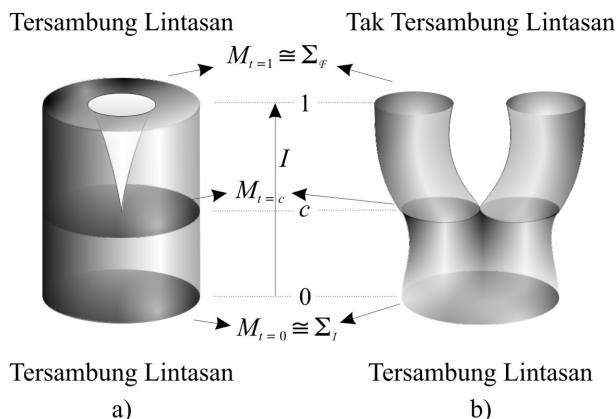
Diberikan sepasang ruang topologis $\Sigma_{\mathcal{I}}$ dan $\Sigma_{\mathcal{F}}$ berdimensi- d , dengan $\Sigma_{\mathcal{I}} \sqcup \Sigma_{\mathcal{F}}$, yang merupakan pembatas bagi ruang-waktu topologis M berdimensi- $(d + 1)$ ($\Sigma_{\mathcal{I}} \sqcup \Sigma_{\mathcal{F}}$ adalah gabungan atau serikat (*union*) saling asing antara $\Sigma_{\mathcal{I}}$ dan $\Sigma_{\mathcal{F}}$). Jika $\Sigma_{\mathcal{I}}$ dan $\Sigma_{\mathcal{F}}$ adalah manifold diferensiabel berdimensi- d kompak tanpa batasan maka keduanya dikatakan “kobordan” jika terdapat manifold M berdimensi- $(d + 1)$, dengan $\Sigma_{\mathcal{I}}$ dan $\Sigma_{\mathcal{F}}$ sebagai batasnya. Lebih jauh lagi, dapat pula dibangun polinomial berderajat d di dalam kelas Stiefel-Whitney maupun kelas Pontrjagin. Dengan mengambil produk skalar bagi masing-masing kelas itu dengan lingkaran orbit (kelas homologi) fundamental bagi manifold, dapat diperoleh bilangan karakteristik, yaitu bilangan $w_i \in \mathbb{Z}_2$ (disebut bilangan Stiefel-Whitney) dan $p_i \in \mathbb{Z}$ (disebut bilangan Pontrjagin) berturut-turut untuk kelas Stiefel-Whitney dan kelas Pontrjagin. Kobordisme membentuk kaitan kesetaraan, karena itu dua manifold adalah kobordan jika mereka berada di dalam kelas kobordisme yang sama^[3]. Manifold berdimensi- $(d + 1)$ itu ada (untuk kasus kobordisme terorientasi) jika semua bilangan Stiefel-Whitney w_i dan juga bilangan Pontrjagin p_i untuk kedua ruang batas ($\Sigma_{\mathcal{I}}$ dan $\Sigma_{\mathcal{F}}$) adalah sama, yaitu $w_i(\Sigma_{\mathcal{I}}) = w_i(\Sigma_{\mathcal{F}})$ dan $p_i(\Sigma_{\mathcal{I}}) = p_i(\Sigma_{\mathcal{F}})$ dengan i menunjukkan kelas Stiefel-Whitney (Pontrjagin) ke- i ^[4,5,6].

Didefinisikan fungsi kontinu surjektif $w : M \rightarrow I = [0, 1]$ (disebut sebagai “fungsi Morse”), yang membawa sebarang titik di M ke satu nilai di dalam interval waktu t . Fungsi itu diharapkan merupakan parameter irisan waktu (*time-slicing*) di dalam M ^[7], jadi dapat diambil satu kondisi sedemikian hingga himpunan semua titik $M_t \equiv \{x \in M \mid w(x) = t\}$ membentuk sub-ruang spasial berdimensi- d bagi M . Di samping itu juga disyaratkan $M_0 = \Sigma_{\mathcal{I}}$ dan $M_1 = \Sigma_{\mathcal{F}}$, sehingga ruang-waktu topologis M dapat merupakan irisan waktu dan dapat diwakili oleh “gabungan tersambung halus” (*smoothly connected union*) bagi

irisiran/potongan (*slice*) spasial M_t

$$M = \bigcup_t M_t. \tag{1}$$

Di dalam kasus yang melibatkan perubahan topologi, terdapat sedikitnya dua interval t bersesuaian dengan dua M_t yang tidak homeomorfis. Selain itu, beberapa M_t dapat mengandung satu atau lebih singularitas. M_t yang mengandung singularitas itu dikatakan sebagai irisan singular dan dilambangkan dengan M_c . Titik singular (di dalam M_c) adalah titik kritis p bagi w yang merupakan fungsi kontinu surjektif dan nilai $w(p)$ disebut nilai kritis bagi w ^[8]. Pada titik khusus itu hasil pemetaan terinduksi di dalam ruang tangen $w^* : TM_p \rightarrow T\mathbb{R}_{w(p)}$ adalah nol, jadi $\partial w(p)/\partial x_i = 0$ untuk semua x_i , dengan (x_1, \dots, x_{d+1}) adalah koordinat lokal di sekitar p . Bayangan (*image*) himpunan titik kritis bagi w mempunyai ukuran nol di dalam I , karena itu mereka merupakan titik terisolasi. Hal itu berarti bahwa irisan singular hanya ada pada satu tempat terisolasi pada t , sehingga baik sebelum maupun sesudah irisan singular itu, M_t merupakan manifold.



GAMBAR 1: Perubahan topologi spasial, $\Sigma_{\mathcal{I}}$ adalah topologi spasial saat mula-mula, sedangkan $\Sigma_{\mathcal{F}}$ saat akhir, yang menunjukkan ruang batas bagi M dengan $I = (0, 1)$ mencirikan selang waktu antara keadaan awal dan akhir. a) Cakram berubah menjadi cakram berlubang satu dengan kedua ruang batas tersambung lintasan. b) Sebuah cakram pecah menjadi dua cakram yang ruang batas atasnya tak tersambung lintasan

Titik kritis p tak merosot (*non degenerate*) jika dan hanya jika matriks Hessian $\Omega_{ij} = \partial^2 w(p)/\partial x_i \partial x_j$ tak singular (ketakmerosotan itu tak tergantung pada sistem koordinat)^[9]. Jumlah swanilai negatif matriks Ω didefinisikan sebagai indeks λ (disebut indeks Morse) bagi titik kritis p . Titik kritis yang tak merosot selalu ada pada tempat terisolasi di dalam M . Di samping itu, dimungkinkan untuk mendeformasi atau menghampiri w sehingga tak lagi mempunyai titik kritis merosot. Karena itu, untuk M tertentu, dapat dipilih

satu fungsi w , sedemikian hingga titik singular hanya terletak pada tempat yang terisolasi.

Irisan singular M_c yang mengandung sejumlah k titik kritis tak merosot p_1, \dots, p_k dengan indeks masing-masing $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, mempunyai jenis homotopi yang sama seperti $M_{c-\epsilon} \cup_{f_1} c^{\lambda_1} \cup \dots \cup_{f_k} c^{\lambda_k}$, dengan ϵ adalah bilangan real positif cukup kecil. $c^{\lambda_i} \equiv \{x \in \mathbb{R}^{\lambda_i} \mid \|x\| \leq 1\}$ adalah sel ke- λ_i dengan batas $S^{\lambda_i-1} \equiv \{x \in \mathbb{R}^{\lambda_i} \mid \|x\| = 1\}$ yang dilekatkan pada $M_{c-\epsilon}$ oleh fungsi yang sesuai, yaitu f_i [8]. Ditinjau $M_{(t_1, t_2)} \equiv \{x \in M \mid t_1 \leq w(x) \leq t_2\}$ yang merupakan subruang bagi M di dalam interval $t_1 \leq t \leq t_2$. Jika hanya ada satu nilai kritis c bagi w di dalam interval itu, maka M_c adalah tarikan deformasi (*deformation retract*) bagi $M_{(t_1, t_2)}$ [4]. Lebih jauh lagi, terdapat pemetaan kontinu surjektif r_t dari $M_{t \neq c}$ ke M_c . Untuk setiap titik kritis dengan indeks λ di dalam M_c terdapat subruang di dalam $M_{(t_1, t_2)}$ yang dipetakan oleh r_t ke titik kritis tersebut. Jika $t < c$ dan $t > c$ maka subruang bagi M_t homotopis berturut-turut dengan $S^{\lambda-1}$ dan $S^{d-\lambda}$. Jika w tidak mempunyai titik kritis di dalam interval $t_1 \leq t \leq t_2$ maka M_t (dengan $t_1 \leq t \leq t_2$) adalah tarikan deformasi bagi $M_{(t_1, t_2)}$. Semua irisan spasial M_t di dalam interval ini juga mempunyai jenis homotopi yang sama, jadi sub-ruang bagi M tersebut berbentuk kanonik. Pada kasus yang terakhir terdapat pemetaan bijektif (pemetaan satu-satu) kontinu di antara dua M_t .

3 SYARAT TOPOLOGIS BAGI RUANG-WAKTU FISIS

Sebelum menjawab pertanyaan dapat tidaknya topologi ruang fisis berubah, sangat perlu dikemukakan berbagai syarat yang menjadikan suatu ruang topologis atau manifold dengan topologi tertentu dapat dikatakan sebagai ruang-waktu fisis. Ditinjau ruang-waktu relativistik berdimensi- K yang merupakan manifold mulus (terdiferensialkan) dan disemati metrik semi-Riemann g dengan tanda Lorentz. Yaitu, pada titik p , jika $g(A, A) > 0$ untuk vektor A , maka terdapat vektor B_i , dengan $i = 1, \dots, K-1$, pada p sedemikian hingga $\{A, B_1, B_2, B_3, \dots\}$ adalah saling ortogonal dan $g(B, B) < 0$ untuk setiap i . Metrik tersebut menentukan struktur kerucut cahaya bagi ruang-waktu [10], dan manifold adalah ruang-waktu hanya jika tersemati metrik yang seperti itu. Kemudian, di bawah kondisi yang bagaimana manifold mulus mengizinkan metrik Lorentz terdefinisi di mana-mana? Manifold mulus tersebut akan selalu dianggap mempunyai struktur topologis yang dikehendaki (parakompak, Hausdorff, dan terdiferensialkan). Karena setiap manifold terdiferensialkan mengizinkan metrik Riemann berhingga positif dan terdefinisi global, maka pertanyaan selanjutnya adalah apakah diperlukan tambahan persyaratan lain

untuk mendapatkan metrik Lorentz terdefinisi santun di mana-mana? Untuk menjawab pertanyaan itu, ditinjau metrik Riemann berhingga positif g^* , manifold mengizinkan metrik Lorentz jika dan hanya jika medan berarah V tak lenyap di mana-mana sedemikian hingga setiap titik ditandai oleh satu dari sepasang $(A, -A)$, dengan A adalah vektor tak nol. Diberikan eksistensi bagi medan berarah V , kemudian sebuah metrik Lorentz g didefinisikan oleh

$$g(B, C) = g^*(B, C) - 2g^*(A, B)/g^*(A, A) \quad (2)$$

untuk semua vektor B, C . Terlihat bahwa $g(A, A) > 0$, sehingga A adalah bak-waktu, dan jika $g^*(A, B) = 0$, yaitu $A \perp B$, maka $g(B, B) < 0$ dan B adalah bak-ruang.

Ketika manifold tidak kompak, manifold itu selalu mengizinkan medan berarah tak lenyap di mana-mana. Namun ketika manifold kompak, medan yang seperti itu diizinkan jika dan hanya jika "karakteristik Euler"-nya sama dengan nol [11] (Pembahasan singkat mengenai karakteristik Euler dihadirkan di dalam Lampiran A). Ungkapan yang terakhir inilah yang berperan penting dalam membahas perubahan topologi [1]. Misalnya, karena bola berdimensi-4 mempunyai karakteristik Euler sama dengan 2 (pers.(A.2)), tidak ada ruang-waktu dengan topologi S^4 , dengan kata lain, manifold kompak itu tak mengizinkan adanya metrik Lorentz. Meskipun demikian, tidak berarti tidak ada ruang-waktu kompak berdimensi-4, misalnya $S^3 \times S^1$ atau $S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$, dengan alasan sebagaimana diberikan oleh pers.(A.3).

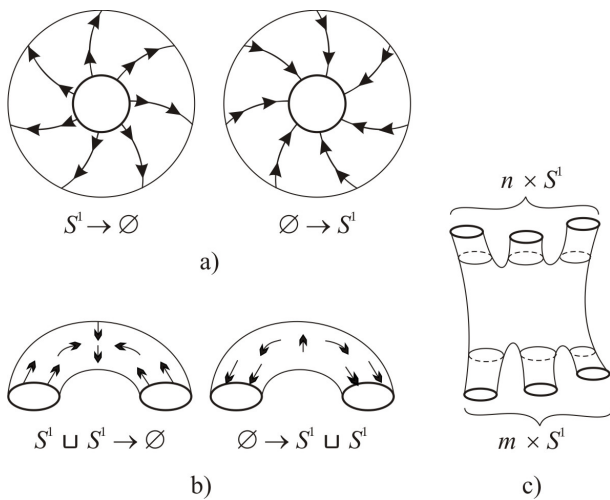
4 APAKAH PERUBAHAN TOPOLOGI SPASIAL DAPAT TERJADI DI DALAM FISIKA?

Sekarang, ditinjau perubahan topologi ruang fisis di dalam konteks ruang-waktu relativistik klasik. Untuk sederhananya, tinjauan hanya untuk ruang fisis tertutup, yaitu ruang kompak tanpa batasan. Misalkan terdapat manifold kompak M berdimensi- $(d+1)$ dengan $\Sigma_{\mathcal{I}}$ dan $\Sigma_{\mathcal{F}}$ sebagai batas saling asing ($\Sigma_{\mathcal{I}}$ dan $\Sigma_{\mathcal{F}}$ kobordan), pertanyaan selanjutnya adalah apakah metrik Lorentz dapat disematkan pada M berkenaan dengan $\Sigma_{\mathcal{I}}$ dan $\Sigma_{\mathcal{F}}$ adalah bak-ruang?

Sebagaimana yang telah dijelaskan di atas, jika $\Sigma_{\mathcal{I}}$ dan $\Sigma_{\mathcal{F}}$ adalah kobordan, maka kobordisme M mengizinkan metrik Lorentz jika karakteristik Euler bagi M sama dengan nol, $\chi(M) = 0$. Meskipun demikian, masih ada kualifikasi yang berkaitan dengan keberadaan medan vektor tak nol di mana-mana di dalam M yang titik-titik ke luar dari $\Sigma_{\mathcal{I}}$ dan masuk ke $\Sigma_{\mathcal{F}}$. Untuk dimensi kobordisme $(d+1)$ genap, persyaratan $\chi(M) = 0$ masih cukup, tetapi untuk $(d+1)$ ganjil, yang secara otomatis $\chi(M) = 0$, terdapat kaidah seleksi tambahan yaitu $\chi(\Sigma_{\mathcal{I}}) = \chi(\Sigma_{\mathcal{F}})$ (kaedah

Reinhardt-Sorkin). Berikut ini akan dihadirkan beberapa contoh.

Di dalam dua dimensi, manifold kompak yang mengizinkan metrik Lorentz hanyalah torus, silinder, botol Klein, dan pita Möbius. Kecuali untuk pita Möbius, semua manifold itu mempunyai $\chi = 0$. Meskipun demikian, homologi bagi pita Möbius sama dengan silinder. Secara topologi, pita Möbius setara dengan bidang proyektif dengan interior cakram yang dibuang. Dalam bentuk seperti itu, terlihat bahwa pita Möbius adalah contoh bagi ruang tertutup berdimensi-1 yang mengembang dari ada menjadi tidak ada atau dari tidak ada menjadi ada (Gambar 2a). Karena torus dan botol Klein tertutup, keduanya mewakili (di dalam wakilan umum) ruang berdimensi-1 yang berkembang menjadi dirinya sendiri, sementara silinder adalah kasus bagi ketiadaan perubahan topologi. Metrik Lorentz yang berbeda juga dapat disematkan pada silinder sedemikian hingga diperoleh pelenyapan atau penciptaan pasangan S^1 (Gambar 2b) [12].



GAMBAR 2: a) Ruang tertutup yang mengembang dari ada menjadi tidak ada atau sebaliknya, dari tidak ada menjadi ada. b) Penciptaan/pelenyapan pasangan S^1 . c) Penggabungan/pemisahan ruang berdimensi-2^[1]

Karena S^1 adalah manifold berdimensi-1 tertutup, hanya kasus perubahan topologi di dalam ruang-waktu berdimensi-2 yang tidak melibatkan pelenyapan dan penciptaan yang ruang dipisah atau digabung sebagaimana ditunjukkan di dalam Gambar 2c. Untuk menghitung karakteristik Eulernya, perhatikan bahwa lingkaran $(m + n)$ mengikat sebuah luasan, tetapi $(m + n - 1)$ bagi mereka tidak mengikat. Karena itu, $b_0 = 1$, $b_1 = m + n - 1$, dan $b_2 = 0$, dengan b_0, b_1 , dan b_2 berturut-turut adalah cacah Betti berdimensi-0, 1, dan 2 (lihat Lampiran A), sehingga $\chi(\text{gabungan atau belahan berdimensi-2}) = 1 - (m + n - 1) + 1 = 2 - (m + n)$. Untuk $m + n > 2$,

$\chi < 0$, sehingga metrik Lorentz tidak dapat disematkan pada manifold. Karena itu di dalam ruang-waktu berdimensi-2 ruang tertutup tidak dapat terjadi pemecahan atau penggabungan, dengan kata lain tak mungkin terjadi perubahan topologi secara fisis untuk ruang-waktu yang demikian itu.

Di dalam ruang-waktu berdimensi-3, cacah lengkap untuk manifold tertutup berdimensi-2 terorientasi dapat diberikan. Dua manifold berdimensi-2 terorientasi dan tertutup adalah kobordan, dan manifold kompak berdimensi-3 mempunyai $\chi = 0$ karena berdimensi ganjil. Karena itu manifold terorientasi dan tertutup berdimensi-2 adalah kobordan Lorentz, yaitu kobordisme mereka mengizinkan metrik Lorentz. Tetapi jika salah satu dari ruang berdimensi-2 itu dibolehkan berkembang menjadi yang lain (dapat terjadi perubahan topologi), maka kaedah seleksi Reinhardt-Sorkin $\chi(\Sigma_{\mathcal{I}}) = \chi(\Sigma_{\mathcal{F}})$ harus juga dipenuhi. Meskipun demikian, setiap manifold berdimensi-2 terorientasi dan tertutup adalah setara topologis dengan bola bergagang- g ($g \geq 0$). Dengan kata lain, setiap manifold yang seperti itu sama dengan T_g , sebuah torus dengan g lubang di dalamnya. Untuk torus yang demikian, $b_0 = 1, b_1 = 2g, b_2 = 1$, sehingga $\chi(T_g) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$, yang menyiratkan bahwa $\chi(T_g) \neq \chi(T_{g'})$ dengan $g \neq g'$. Aturan seleksi melarang suatu T_g berkembang menjadi $T_{g'}, g \neq g'$.

Tidak seperti manifold tertutup berdimensi-2, dua manifold berdimensi-3 tertutup adalah kobordan, dengan sebuah kobordisme terorientasi atau tak terorientasi. Tetapi dimensi kobordisme adalah genap, sehingga tidak secara otomatis $\chi = 0$, sebagaimana yang telah ditunjukkan untuk kobordisme berdimensi-3. Meskipun demikian, di dalam kasus ini, dua manifold berdimensi-3 tertutup adalah kobordan Lorentz. Untuk menunjukkannya, diperkenalkan gagasan jumlahan tersambung (*connected sum*) bagi dua manifold M dan M' ; ditulis sebagai $M \# M'$. Untuk membentuk $M \# M'$, bola terbuka berdimensi- d dicuplik dan dibuang dari M dan M' , dan kemudian dua batasan hasilnya (batas dari daerah yang tercuplik di dalam M dan M') diidentifikasi. Karakteristik Euler dari jumlahan tersambung itu dapat diperoleh dengan menggabungkan sisi M dengan sisi M' . Misalnya, untuk 2 dimensi, diambil sisi berbentuk bujur-sangkar, pada penggabungan itu 2 sisi, 4 ujung dan 4 rusuk lenyap, sehingga $\chi(M) + \chi(M')$ berubah dengan $d\chi = d(\text{ujung}) - d(\text{rusuk}) + d(\text{sisi}) = -4 - (-4) - 2 = -2$. Dengan demikian diperoleh

$$\chi(M \# M') = \chi(M) + \chi(M') - 2. \tag{3}$$

Sebagai contoh, ditinjau kasus bidang proyektif ($\mathbb{R}P^2$) dengan sebuah lubang di dalamnya. Ruang ini merupakan jumlahan tersambung antara $\mathbb{R}P^2$ dan cakram tertutup D^2 . Karena $\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$ dan $\chi(D^2) = 1$, maka pembentukan jumlahan tersambung bagi kedua

ruang itu menyusutkan karakteristik Euler bagi $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ menjadi nol, $\chi(\mathbb{R}\mathbb{P}^2 \# D^2) = \chi(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) + \chi(D^2) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$.

Secara umum, hubungan (3) juga berlaku untuk manifold kompak berdimensi genap. Misalnya, di dalam 4-dimensi, diperoleh^[13]

$$\chi(S^2 \times S^2) = 2 \times 2 = 4, \chi(S^1 \times S^3) = 0, \chi(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) = 3. \quad (4)$$

Karena itu, jika $\chi(M) = -|2d|$, maka dapat diperoleh manifold kompak (dengan batasan yang sama) dengan $\chi = 0$ melalui penjumlahan-sambungan secara beruntun dengan $S^2 \times S^2$. Jika $\chi(M) = |2d|$ maka dapat dilakukan hal yang sama dengan $S^1 \times S^3$, mengingat jika $\chi(M)$ gasal, pertama diperoleh $\chi(M \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2) = \text{genap}$ dan kemudian diproses sebagaimana sebelumnya.

Dua manifold berdimensi-3 tertutup adalah kobordan. Karena itu, mereka dapat dibuat kobordan Lorentz, yaitu jika $\Sigma_{\mathcal{I}}$ dan $\Sigma_{\mathcal{F}}$ adalah manifold berdimensi-3 tertutup dan terorientasi, maka terdapat ruang-waktu berdimensi-4 kompak dengan $\Sigma_{\mathcal{I}}$ dan $\Sigma_{\mathcal{F}}$ sebagai batasnya. Dari sudut pandang topologi, tak ada batasan pada ruang berdimensi-3 yang berubah topologinya; ini menyangkut ruang berdimensi-3 yang terpecah maupun tergabung sepanjang ruang-waktu berdimensi-4 tersambung^[12]. Sebagai contoh, ruang-waktu Lorentz dengan sebuah cabang bagi alam semesta yang bercabang dua adalah $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 - 3$ bola, dan karakteristik Euler bagi bola berdimensi-4 adalah 1, sehingga $\chi(\mathbb{C}\mathbb{P}^2 - 3 \text{ bola}) = 0$. Dimungkinkan untuk mendapatkan medan vektor bak-waktu sedemikian hingga medan itu mengarah dari S^3 yang mewakili masa lampau menuju ke yang mewakili masa depan.

Masih tentang ruang-waktu berdimensi-4, sekarang bagaimanakah jika manifold tertutup $\Sigma_{\mathcal{I}}$ dan $\Sigma_{\mathcal{F}}$ mempunyai topologi yang berbeda? Teorema Geroch^[13] menyatakan bahwa jika hal itu terjadi maka ruang-waktu M mengandung kurva bak-waktu tertutup atau jika tidak maka M haruslah tidak terorientasi secara temporal (mengandung singularitas). Teorema itu menyiratkan bahwa perubahan topologi harus dibayar dengan mahal. Perlu dilakukan pengamatan mengenai pengaruh kondisi energi realistik pada perubahan topologi; khususnya, perlu meninjau teorema Tipler untuk gejala berkondisi energi realistik yang tidak memungkinkan terjadinya perubahan topologi. Di sini hal itu tidak ditinjau lebih jauh karena tafsiran mengenai kondisi tersebut masih kontroversial, sementara pembahasan dalam ranah topologi murni telah lebih dari cukup.

Teorema Geroch menyisakan ganjalan yang cukup serius terkait dengan diizinkan kurva bak-waktu tertutup atau ketakorientasian temporal. Ganjalan itu muncul karena gagasan kurva bak-waktu tertutup tidak memungkinkan untuk mendefinisikan medan

kuantum pada ruang-waktu dengan kurva seperti itu. Pertama, ruang-waktu terorientasi temporal jika dan hanya jika ruang ini mengizinkan medan vektor bak-waktu tak lenyap dan kontinu di mana-mana. Jika ruang-waktu tidak terorientasi secara temporal, maka tidak mungkin membagi kerucut cahaya menjadi masa lampau dan masa depan dengan cara konsisten dan kontinu secara global. Terkait dengan hal itu Callender^[1] mengemukakan tiga pengamatan:

1. Meskipun ruang-waktu terorientasi secara tidak temporal, namun secara lokal, masih terorientasi temporal, dalam pengertian bahwa di sekitar setiap titik terdapat lingkungan terbuka yang terorientasi secara temporal (sepanjang pengamat tinggal di dalam lingkungan itu). Sepanjang alam semesta yang teramati adalah terorientasi temporal, keorientasian temporal lokal mungkin telah cukup sekalipun ruang-waktu tidak terorientasi temporal (secara global);
2. Ruang-waktu terorientasi tak temporal adalah ruang tersambung tak sederhana, karena itu terdapat ruang-waktu dengan metrik yang sama yang tersambung sederhana (ruang liput universal bagi ruang-waktu) sehingga terorientasi temporal. Kecocokan bagi kesimpulan itu adalah bahwa jika pengamat berfikir bahwa ruang-waktu tidaklah terorientasi temporal, maka dia akan tahu bahwa terdapat ruang-waktu yang (dalam pengertian tertentu) rukun dengan bukti pengamatan yang sama dan masih terorientasi temporal. Jadi dia tidak pernah dipaksa oleh pengamatan (sendirian) untuk beranggapan bahwa ruang-waktu adalah tidak terorientasi. Hal itu mungkin saja, tetapi tidak berarti bahwa ruang-waktu terorientasi akan terorientasi secara temporal;
3. Keorientasian tak temporal dan keberadaan kurva ruang-waktu tertutup adalah dua sifat yang saling bebas. Ruang-waktu silinder (dengan sumbu bak-ruang) dan ruang-waktu Gödel adalah dua contoh ruang-waktu terorientasi temporal dan mengandung kurva ruang-waktu tertutup. Sementara ruang-waktu de Sitter eliptik adalah contoh ruang-waktu terorientasi tak temporal tetapi tidak mengandung kurva bak-waktu tertutup.

Butir 3 di atas menyiratkan bahwa perubahan topologi masih dapat terjadi tanpa menyertakan kurva bak-waktu tertutup, yaitu dengan mengizinkan keorientasian tak temporal. Di samping itu, Sorkin^[14] telah menunjukkan bahwa pembuangan keorientasian temporal mengeliminasi keberlakuan kaedah seleksi Reinhardt-Sorkin untuk dimensi gasal. Sayangnya, peralihan ke ruang-waktu tak terorientasi tidak

memberikan banyak kebebasan. Sebagaimana yang telah ditunjukkan oleh Borde^[12], masih terdapat beberapa batasan yang cukup tegas pada perubahan topologi; bagian dari kasus yang ruang muncul dari ketiadaan atau menuju ketiadaan, perubahan topologi selalu melibatkan keberadaan kurva bak-waktu tertutup (sepanjang ruang-waktu kompak).

Meskipun demikian, pernyataan di atas tidak mengatakan bahwa tidak ada sesuatu yang perlu dikaji lagi terkait dengan dapat tidaknya ruang-waktu fisis mengalami perubahan topologi^[15]. Misalnya, ditinjau model alam semesta Hartle-Hawking yang merupakan salah satu dari model alam semesta yang tidak mempunyai batas^[16]. Contoh sederhana dapat dirancang terkait dengan model tersebut yang mempunyai perubahan topologi tanpa kurva bak-waktu tertutup. Misalnya ruang ($\mathbb{R}P^4 - \text{bola}$), karena $\chi(\mathbb{R}P^4) = 1$ maka $\chi(\mathbb{R}P^4 - \text{bola}) = 0$, analog dengan pita Möbius berdimensi-4. Pita ini mempunyai batas tunggal yang dapat diambil sebagai hiper-permukaan akhir bagi ruang-waktu. Dengan menentukan medan berarah bak-waktu tegak-lurus dengan batasnya, dapat digambarkan model Lorentz bagi kosmologi Hartle-Hawking dengan perubahan topologi tetapi tanpa kurva bak-waktu. Horowitz^[17] dan yang lainnya telah menunjukkan bahwa jika metrik menuju nol pada titik-titik terisolasi, yaitu jika metrik yang ditinjau adalah merosot, maka perubahan topologi dapat terjadi tanpa kurva bak-waktu tertutup (meskipun pada manifold terorientasi temporal).

Sebagai contoh terakhir, teori Kaluza-Klein mencoba untuk memberikan penjelasan geometris mengenai berbagai simetri tera dalam bentuk simetri geometris bagi dimensi ekstra yang kompak. Di dalam teori asal, ruang-waktu berdimensi-5 digulung sepanjang dimensi bak-ruang ekstra, yang memberikan topologi $\mathbb{R}^4 \times S^1$. Karena itu tera elektromagnetik terkait dengan transformasi geometris sepanjang S^1 . Jika dimasukkan interaksi lemah (teori elektrolemah $U(1) \times SU(2)$) maka diperlukan paling sedikit tiga atau lebih dimensi kompak, dan jika interaksi kuat juga dimasukkan maka paling sedikit ditambahkan tujuh dimensi. Misalnya dianggap ruang fisis adalah kompak dan terorientasi, aturan seleksi $\chi(\Sigma_{\mathcal{I}}) = \chi(\Sigma_{\mathcal{F}})$ menyiratkan perubahan topologi bagi dimensi bak-ruang kompak berdimensi-10^[1].

5 SIMPULAN

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa ruang topologis atau manifold yang tidak kompak selalu dapat dijadikan sebagai ruang-waktu fisis. Sementara manifold kompak dapat dijadikan sebagai ruang-waktu fisis hanya bila karakteristik Euler-nya sama dengan nol. Selanjutnya, terkait dengan kemungkinan terjadinya perubahan topologi spasial, untuk ruang-

waktu kompak tanpa batasan M berdimensi genap ($(d+1)$ genap) dengan $\Sigma_{\mathcal{I}}$ dan $\Sigma_{\mathcal{F}}$ adalah kobordan bak-ruang, perubahan topologi spasial dapat terjadi apabila karakteristik Euler bagi M sama dengan nol, $\chi(M) = 0$. Tetapi untuk $(d+1)$ ganjil, yang otomatis $\chi(M) = 0$, perubahan topologi dapat terjadi jika dipenuhi kaidah seleksi Reinhardt-Sorkin, yaitu $\chi(\Sigma_{\mathcal{I}}) = \chi(\Sigma_{\mathcal{F}})$.

Meskipun dapat dilakukan pengeliminasian kaedah Reinhardt-Sorkin untuk dapat terjadinya perubahan topologi bagi ruang-waktu berdimensi ganjil, namun pengeliminasian itu masih menyisakan beberapa batasan yang cukup tegas. Batasan itu muncul terkait dengan kehadiran kurva bak-waktu tertutup (sepanjang ruang-waktu kompak) untuk setiap perubahan topologi yang terjadi.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Callender, C. dan R. Weingard, 2000, Topology Change and the Unity of Space, *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.*, vol. 31, no. 2, hal. 227-246
- [2] Bama, A.A., Muslim, M.F. Rosyid, dan M. Satriawan, 2005, Kajian Awal Pengkuantuman Tak Setara Sistem Zarah Identik di dalam Ruang dengan Topologi Berubah, dalam *Prosiding Pertemuan Ilmiah XXIII HFI Jateng & DIY*, Buku 1, Yogyakarta, 9 April 2005, hal. 23-33, Himpunan Fisika Indonesia Cabang Jateng & DIY
- [3] Ginzburg, V., V. Guillemin, dan Y. Karshon, 1996, Cobordism Theory and Localization Formulas for Hamiltonian Group Actions, *arXiv:dg-ga/9601003*
- [4] Milnor, J., 1965, *Lecture on the h-Cobordism Theorem*, Princeton University Press, Princeton, NJ
- [5] Mazur, P.O., 1987, Cobordism and Semiclassical Instability of Toroidal Compactifications, *Nucl. Phys. B*, vol. 294, hal. 525-536
- [6] Ionicioiu, R., 1997, Building Blocks for Topology Change in 3D, *arXiv:gr-qc/9711069*
- [7] Isham, C.J. dan K. Savvidov, 2001, Quantising the Foliation in History Quantum Field Theory, *arXiv:quant-ph/0110161*
- [8] Nesterov, A.I., 1998, *Morse Theory and Topology Change in (2+1)-dimensional Gravity, Recent Developments in Gravitation and Mathematical Physics*, editor: A. Garcia et.al., Science Network Publishing
- [9] Dowker, H.F., R.S. Garcia, dan S. Surya, 2000, Morse Index and Causal Continuity. A Criterion for Topology Change in Quantum Gravity, *Class. Quantum Grav.*, vol. 17, hal. 697-712
- [10] Bama, A.A. dan Muslim, 2004, Deriving Conformal Group from Infinitesimal Displacement Field in Minkowski Space, *Phys. J. IPS*, vol. C7, hal. 0210
- [11] Hawking, S. dan G. Ellis, 1971, *The Large-Scale Structure of Spacetime*, hal. 40-52, Cambridge University Press, Cambridge
- [12] Borde, A., 1994, Topology Change in Classical General Relativity, *arXiv:gr-qc/9406053*
- [13] Geroch, R., 1967, Topology in General Relativity, *J. Math. Phys.*, vol. 8, hal. 782-786
- [14] Sorkin, R., 1986, Non-Time Orientable Lorentzian Cobordism Allows for Pair Creation, *Int. J. Theor. Phys.*, vol. 25, hal. 877-881

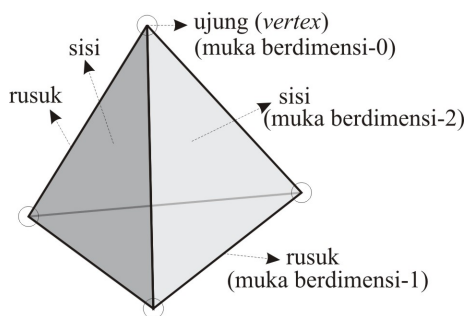
- [15] Friedman, J.L., 1991, *Spacetime Topology and Quantum Gravity*, dalam *Conceptual Problems of Quantum Gravity*, editor: A. Ashtekar dan J. Stachel, Boston; Birkhauser Press
- [16] Hartle, J.B. dan S.W. Hawking, 1983, Wavefunction of the Universe, *Phys. Rev. D*, vol. 28, hal. 2960-2975
- [17] Horowitz, G., 1991, Topology Change in Classical and Quantum Gravity, *Class. Quantum Grav.*, vol. 8, hal. 587-601
- [18] Nakahara, M., 1990, *Geometry, Topology and Physics*, hal. 56-60, IOP Publishing, Bristol

LAMPIRAN

A Karakteristik Euler dan Homologi

Karakteristik Euler adalah sifat polihedron. Dalam tiga dimensi, polihedron mempunyai muka atau sisi berdimensi-2, rusuk berdimensi satu yang merupakan batas atau tepi bagi sisi, dan ujung (*vertex*) berdimensi-0 yang merupakan ujung-ujung rusuk (lihat Gambar A.1). Mereka selanjutnya disebut sebagai, berturut-turut, muka berdimensi-2, muka berdimensi-1, dan muka berdimensi-0. Untuk dimensi yang lebih tinggi, polihedron berdimensi-*d* dapat juga mempunyai muka berdimensi- $(d - 1)$ yang dibatasi oleh muka berdimensi- $(d - 2)$, sedangkan muka berdimensi- $(d - 2)$ itu dibatasi oleh muka berdimensi- $(d - 3)$, dan seterusnya. Jika D_i adalah jumlah muka berdimensi-*i* untuk polihedron berdimensi-*d*, maka karakteristik Euler χ bagi polihedron itu adalah

$$\chi = (-1)^i D_i; \quad i = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (A.1)$$



GAMBAR A.1: Tetrahedron (berdimensi-3) dengan 4 sisi, 6 rusuk, dan 4 ujung (*vertex*), sehingga mempunyai karakteristik Euler $\chi = 4 - 6 + 4 = 2$

Untuk manifold kompak *M*, semua polihedron yang secara topologis setara (homeomorfis) dengan *M* mempunyai karakteristik Euler yang sama (ungkapan yang tersirat dari teorema Poincaré-Alexander^[18]). Karena itu, karakteristik Euler bagi *M* dapat dihitung dari karakteristik Euler bagi suatu polihedron

yang homeomorfis dengannya. Misalnya, karena permukaan bola S^2 homeomorfis dengan permukaan tetrahedron, maka $\chi(S^2) = \chi(\text{tetrahedron}) = 4 - 6 + 4 = 2$ sebagaimana ditunjukkan pada Gambar A.1. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa

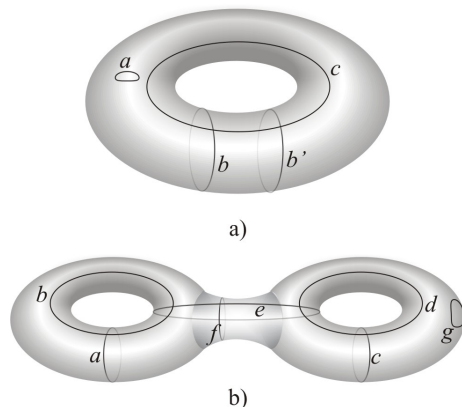
$$\chi(S^{2m}) = 2, \quad \chi(S^{2m-1}) = 0, \quad \text{untuk } m \geq 1. \quad (A.2)$$

Karakteristik Euler bagi produk langsung dua atau lebih manifold diberikan oleh

$$\chi(M_1 \times M_2 \times \dots) = \chi(M_1) \times \chi(M_2) \times \dots. \quad (A.3)$$

Karena itu, meskipun S^2 dan $S^1 \times S^1$ mempunyai dimensi yang sama, namun Karakteristik Eulernya berbeda, yaitu, berturut-turut, $\chi(S^2) = 2$ dan $\chi(S^1 \times S^1) = 0$.

Selanjutnya, akan dibahas sekilas mengenai karakteristik Euler dipandang dari teori homologi. Penghitungan dengan menggunakan teori ini didasarkan pada cacah kurva tertutup bebas (kurva tanpa batasan) yang bukan merupakan batasan bagi daerah berdimensi-2. Cacah kurva yang seperti itu disebut sebagai "cacah Betti" (*Betti number*) b_i bagi manifold atau benahan ketersambungan; merupakan invarian topologis bagi manifold. Jumlah kurva tertutup bebas di dalam 2-dimensi mempunyai cacah Betti b_1 . Dua kurva yang demikian itu tidak bebas jika keduanya bersama-sama membentuk batas bagi daerah berdimensi-2. Pada bola, semua kurva tertutup mengikat luasan dan homolog (tak bebas), sedangkan pada torus terdapat tiga macam kurva tertutup, sebagaimana yang ditunjukkan oleh Gambar A.2a.



GAMBAR A.2: a) Kurva tertutup pada torus (*a, b, dan c*). b) Kurva tertutup pada torus bergenus-2 (*a - g*)

Di dalam Gambar A.2a, kurva *a* mengikat luasan, sedangkan kurva *b* dan *c* tidak. Kurva yang mengikat suatu luasan adalah kurva yang dapat dikontraksi atau dideformasi secara kontinu menjadi sebuah titik. Kurva *b* dan *b'* tidak bebas, artinya kurva *b* dapat dideformasi kontinu menjadi *b'* atau sebaliknya (atau kurva *b* setara dengan kurva *b'*), sedangkan *b* dan *c*

bebas, sehingga terdapat 2 kurva tertutup bebas yang tidak mengikat luasan, karena itu $b_1 = 2$. Untuk torus bergenus-2 (Gambar A.2b), kurva a, b, c , dan d adalah empat kurva tertutup bebas yang tidak mengikat luasan. Kurva e nampaknya juga kurva tertutup bebas, namun a, e, c bersama-sama mengikat luasan yang berakibat e bukanlah kurva bebas. Jadi untuk kasus ini $b_1 = 4$. Perlu dicatat bahwa kurva f mengikat luasan karena f dan g saling tidak bebas sementara g mengikat luasan.

Selanjutnya, ditinjau permukaan tanpa batas (permukaan tertutup) yang tidak mengikat sebuah volume. Karena bola S^2 dan torus T^2 berdimensi-2, maka tak ada volume sebagai bagian dari mereka sendiri. Karena itu, di dalam setiap kasus terdapat satu permukaan bebas yang seperti itu, dan cacah Betti berdimensi-2 adalah $b_2 = 1$. Cacah Betti yang lebih tinggi b_i adalah jumlah permukaan berdimensi- i yang tidak mengikat daerah berdimensi- $(i + 1)$ bagi manifold. Jadi untuk manifold berdimensi-2, $b_i = 0$, untuk $i > 2$. Karena dua titik bersama-sama mengikat suatu kurva, maka kedua titik itu tidaklah saling bebas. Karena itu, di dalam manifold tersambung $b_0 = 0$ atau 1^[18].

Teorema Euler-Poincaré menyiratkan bahwa untuk manifold M ber-dimensi- d , karakteristik Euler juga dapat dinyatakan dalam cacah Betti, yaitu

$$\chi(M) = (-1)^i b_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (\text{A.4})$$

Misalnya, untuk bola S^2 , $b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = 1$, sehingga $\chi(S^2) = 1 - 0 - 1 = 2$. Sedangkan untuk torus $\chi(T^2) = 1 - 2 + 1 = 0$.