

Menentukan Distribusi Temperatur dengan Menggunakan Metode Crank Nicholson

SITI SAILAH

Jurusan Fisika FMIPA, Universitas Sriwijaya, Sumatera Selatan, Indonesia

INTISARI: Dalam suatu benda yang memiliki gradien temperatur maka akan terjadi perpindahan energi atau perambatan panas dari bagian yang bertemperatur tinggi ke bagian yang bertemperatur rendah. Proses perambatan panas tersebut dapat diperlihatkan oleh distribusi temperaturnya. Perhitungan distribusi temperatur melibatkan persamaan diferensial parsial. Bentuk model matematis perambatan panas adalah persamaan parabolik. Persamaan panas 1D ini didekati dengan menggunakan metode Crank Nicholson serta penyelesaian Gauss-Seidel. Hasil menunjukkan bahwa terjadi perambatan panas menuju bagian tengah benda karena ujung-ujung benda dipertahankan bertemperatur 0°C dan temperatur menurun sebagai fungsi waktu karena terjadi perpindahan panas ke bagian lain.

KATA KUNCI: perambatan panas 1-D, distribusi temperatur, persamaan diferensial parsial, metode Crank Nicholson

ABSTRACT: A plate having temperature gradient will conduct energy transfer or heat transfer from high temperature side to low temperature side. The heat transfer can be shown by temperature distribution. Temperature distribution calculation involves partial differential equation. The mathematical model of heat transfer is parabolic equation. The approachment used is Crank Nicholson method that is solved by Gauss Seidel. The result shows that there is heat transfer toward middle side because two ends of plate is maintained to be 0°C and temperature decreases as function of time because there is heat transfer to other side.

KEYWORDS: 1-D physical heat transfer, temperature distribution, partial differential equation, Crank Nicholson method

E-MAIL: siti.sailah@yahoo.com

Mei 2010

1 PENDAHULUAN

Dalam ilmu geofisika, banyak persoalan yang berhubungan dengan perambatan panas. Adanya perambatan panas dari dalam bumi menyebabkan aktifitas seperti energi panas bumi, sedimentasi, intrusi, pembentukan gunung, erosi, dan lain-lain. Di dalam bumi, perpindahan panas terjadi secara konduksi melalui litosfer bumi^[1].

Pembelajaran perambatan panas yang terjadi di dalam bumi merupakan persoalan kompleks karena melibatkan banyak parameter dan bersifat inhomogen dan anisotropi. Sehingga penyelesaian persoalan perambatan panas dalam bumi memerlukan asumsi-asumsi untuk menyederhanakan permasalahan.

Banyak model matematika perambatan panas merupakan persamaan diferensial parsial. Penyelesaian persamaan diferensial parsial dapat dilakukan dengan beberapa metode. Pemilihan metode pendekatan berdasarkan pada tujuan dan kompleksitas masalah.

Tulisan ini mencoba meninjau permasalahan perambatan panas untuk kasus sederhana sebagai tahap awal

pembelajaran perambatan panas dalam bumi. Adapun tujuan penelitian ini adalah menentukan distribusi temperatur untuk kasus perambatan panas 1-D. Objek penelitian adalah suatu simulasi domain bidang yang pada batas-batas dan titik-titik tertentu diketahui temperaturnya^[2]. Pendekatan yang digunakan adalah metode Crank Nicholson dengan penyelesaian metode Gauss-Seidel.

2 DASAR TEORI

2.1 Perambatan Panas

Panas mengalir dari benda bertemperatur lebih tinggi ke benda bertemperatur lebih rendah. Laju perpindahan panas yang melewati benda padat sebanding dengan gradien temperatur atau beda temperatur per satuan panjang^[1].

Misalkan suatu lempeng logam yang panjang dan lebar dengan temperatur bagian bawah T_1 dan temperatur bagian atas T_2 dan ketebalan d maka laju aliran panas per satuan luas melalui lempeng tersebut

adalah $(T_2 - T_1)/d$.

Laju perpindahan panas per satuan luas ke atas melewati lempeng logam adalah Q sebesar:

$$Q = -k \left(\frac{T_2 - T_1}{d} \right) \tag{1}$$

Dari pers.(1) jelas bahwa jika sistem berada pada keadaan tunak maka kita hanya perlu melakukan integrasi pada persamaan itu dan mensubstitusi untuk memecahkan persoalan. Namun jika temperatur berubah menurut waktu maka persoalannya menjadi lebih rumit^[3].

Permasalahan yang mengandung waktu sebagai variabel bebas biasanya termasuk dalam persamaan parabola. Persamaan parabola yang paling sederhana adalah perambatan panas dan difusi termal 1-D, yang mempunyai bentuk:

$$\frac{\delta T}{\delta t} = K \frac{\delta^2 T}{\delta x^2}, \tag{2}$$

dengan T adalah temperatur, K adalah koefisien konduktivitas, serta t dan x merupakan variabel waktu dan jarak^[2,4].

Untuk konduksi satu dimensi pada pelat panjang, temperatur hanya merupakan fungsi koordinat x saja dan panas dipindahkan dalam arah ini^[3]. Distribusi temperatur dapat dihitung dengan menyelesaikan persamaan difusi panas dengan syarat-syarat batas tertentu.

Untuk penyelesaian persamaan diferensial parsial jenis parabolik ini seperti persamaan perambatan panas berdimensi satu disederhanakan menjadi:

$$u_t = c^2 u_{xx} \tag{3}$$

Pers.(1) berlaku untuk daerah $0 \leq x \leq L$, waktu $t \geq 0$, dengan mengasumsikan $c = 1$ dan $L = 1$, dan syarat-syarat batasnya adalah^[5]:

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0 \tag{4}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (\text{syarat awal}) \tag{5}$$

$$u(0, t) = u(1, t), \quad (\text{syarat batas}). \tag{6}$$

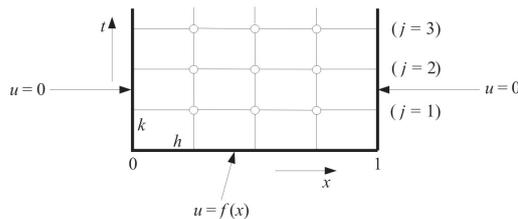
Suatu hampiran beda hingga Pers.(4) adalah

$$\frac{1}{k} (u_{i,j+1} - u_{i,j}) = \frac{1}{h^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \tag{7}$$

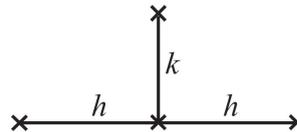
Gambar 1 menunjukkan grid dan titik-titik *mesh*. Ukuran *mesh*-nya dalam arah x adalah h dan dalam arah t adalah k ^[5]. Pers.(5) melibatkan keempat titik seperti ditunjukkan pada Gambar 2.

Jika $r = k/h^2$ pada pers.(7) dengan mencari harga $u_{i,j+1}$, maka pers.(7) menjadi

$$u_{i,j+1} = (1 - 2r)u_{i,j} + r(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) \tag{8}$$



GAMBAR 1: Grid dan titik-titik *mesh* untuk pers.(7)

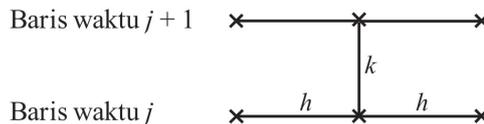


GAMBAR 2: Keempat titik pada pers.(7)

2.2 Metode Crank-Nicholson

Metode ini memanfaatkan harga-harga u di keenam titik seperti Gambar 3. Dengan mengalikan bilangan $1/2$ dari ruas kanan sama dengan dan pada dua baris waktu di pers.(9) serta dengan memperhatikan Gambar 3, maka persamaan metode Crank-Nicholson ini adalah

$$\frac{1}{k} (u_{i,j+1} - u_{i,j}) = \frac{1}{2h^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + (u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) \tag{9}$$



GAMBAR 3: Keenam titik pada pers.(9)

Dengan mengalikan masing-masing ruas kiri dan kanan dari sama dengan pada pers.(10) dengan $2k$ dan dengan menuliskan $r = k/h^2$, serta dengan mengumpulkan ketiga suku padanan baris waktu $j+1$ ke ruas kiri dan ketiga suku padanan baris waktu j ke ruas kanan, maka pers.(10) menjadi

$$(2 + 2r)u_{i,j+1} - r(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) = (2 - 2r)u_{i,j} + r(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) \tag{10}$$

3 HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk menerapkan metode tersebut dalam perhitungan kita buat suatu simulasi domain bidang yaitu sebuah benda logam batang yang diisolasi secara membujur dengan panjang 1 kemudian pada ujung-ujung

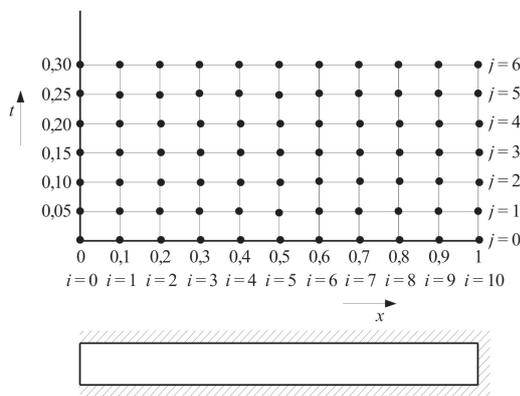
batang dipertahankan temperaturnya 0°C. Temperatur awal pada batang diberikan oleh fungsi $f(x, t) = \sin \pi x$, lihat Gambar 4 berikut.



GAMBAR 4: Batang logam yang diisolasi

Dengan menggunakan pers.(11) distribusi temperatur dalam logam dapat dihitung untuk $0 \leq i \leq 10$, harga batas $T(0, t) = T(1, t) = 0$, dan $0 \leq t \leq 0,30$. Untuk perhitungan ini harga $h = 0,1$ dan $k = 0,05$.

Untuk harga $h = 0,1$ dan $k = 0,05$, maka harga $r = k/h^2 = 5$. Agar lebih mudah untuk perhitungan Gambar 4 dapat dibuat grid dengan kisi-kisi berinterval sama seperti Gambar 5^[6].



GAMBAR 5: Grid untuk kasus gambar 4

Penerapkan metode Crank-Nicholson menghasilkan

$$12T_{i,j+1} - 5(T_{i+1,j+1} + T_{i-1,j+1}) = -8T_{i,j} + 5(T_{i+1,j} + T_{i-1,j}) \quad (11)$$

Untuk $j = 0$ didapat sejumlah persamaan temperatur setiap titik seperti berikut:

$$T_{i,1} = -8T_{i,0} + 5(T_{i+1,0} + T_{i-1,0} + T_{i+1,1} + T_{i-1,1}) \quad (12)$$

dengan $i = 1, 2, \dots, 9$.

Dari pers.(12) di atas harga awal $T_{2,1} = T_{3,1} = T_{4,1} = T_{5,1} = T_{6,1} = T_{7,1} = T_{8,1} = T_{9,1} = 0$. Temperatur setiap titik ini diselesaikan dengan menggunakan metode Gauss-Seidel dan bahasa pemrograman MATLAB yang susunannya terlampir. Hasil perhitungan dari program tersebut seperti Tabel 1 (terlampir).

Hasil perhitungan temperatur menunjukkan bahwa panas terpusat di bagian tengah benda atau dengan kata lain makin ke tengah bagian benda/logam tersebut temperatur makin meningkat. Hal ini sesuai

dengan teori yaitu mengikuti fungsi parabolik. Dan temperatur makin menurun sebagai fungsi dari waktu karena adanya perpindahan panas ke bagian benda lain.

4 SIMPULAN DAN SARAN

Dari hasil penelitian ini diperoleh kenyataan bahwa distribusi temperatur pada benda/objek penelitian sesuai dengan teori yaitu mengikuti fungsi parabolik dengan temperatur maksimum berada di bagian tengah benda dan temperatur berubah terhadap waktu. Perubahan ini menunjukkan adanya perpindahan energi atau perpindahan panas ke bagian lain benda.

Penelitian ini agar dilanjutkan untuk kasus perpindahan panas 2D tak tunak.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Fowler, C.M.R., 1990, *The Solid Earth*, Cambridge University Press, New York
- [2] Supriyono, 2005, Aplikasi Metode Elemen Hingga Untuk Perhitungan Perambatan Panas Pada Kondisi Tunak, *Prosiding Seminar Nasional Aplikasi Teknologi Informasi*
- [3] Incropera, F.P., et.al., 1981, *Fundamentals of Heat Transfer*, John Wiley & Sons, Inc.
- [4] Holman, J.P., 1997, *Perpindahan Kalor*, Penerbit Erlangga
- [5] Kreyszig, E., 1988, *Matematika Teknik Lanjutan*, John Wiley & Sons, Inc.
- [6] James, M.L., et.al., 1993, *Applied Numerical Methods for Digital Computation*, HarperCollins College Publishers

TABEL 1: Hasil perhitungan distribusi temperatur pada kasus perpindahan panas 1-D untuk logam 2-D dengan metode Crank-Nicolson

Waktu (t)	TEMPERATUR										
	x = 0	x = 0.1	x = 0.2	x = 0.3	x = 0.4	x = 0.5	x = 0.6	x = 0.7	x = 0.8	x = 0.9	x = 1
t = 0	0	0.3090	0.5878	0.8090	0.9511	1.0000	0.9511	0.8090	0.5878	0.3090	0
t = 0.05	0	0.1875	0.3567	0.4909	0.5771	0.6068	0.5771	0.4909	0.3567	0.1875	0
t = 0.10	0	0.1138	0.2164	0.2979	0.3502	0.3682	0.3502	0.2979	0.2164	0.1138	0
t = 0.15	0	0.0690	0.1313	0.1807	0.2125	0.2234	0.2125	0.1807	0.1313	0.0690	0
t = 0.20	0	0.0419	0.0797	0.1097	0.1289	0.1355	0.1289	0.1097	0.0797	0.0419	0
t = 0.25	0	0.0254	0.0483	0.0665	0.0782	0.0822	0.0782	0.0665	0.0483	0.0254	0
t = 0.30	0	0.0154	0.0293	0.0404	0.0475	0.0499	0.0475	0.0404	0.0293	0.0154	0

Listing Program

```

disp('
disp('=====')
disp('== PERHITUNGAN TEMPERATUR SETIAP TITIK PADA BATANG LOGAM DUA DIMENSI ==')
disp('== DENGAN PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL JENIS PARABOLIK METODE CRANK NICOLSON ==')
disp('== OLEH : SITI SAILAH ==')
disp('=====')
disp('! Waktu ! TEMPERATUR !')
disp('! (t) !-----!')
disp('! x = 0 ! x = 0.1 ! x = 0.2 ! x = 0.3 ! x = 0.4 ! x = 0.5 ! x = 0.6 ! x = 0.7 ! x = 0.8 ! x = 0.9 ! x = 1 !')
disp('!-----!')
format short g
% Harga batas temperatur pada batang logam :
T00 = 0;
T01 = 0;
T02 = 0;
T03 = 0;
T04 = 0;
T05 = 0;
T06 = 0;
T10_0 = 0;
T10_1 = 0;
T10_2 = 0;
T10_3 = 0;
T10_4 = 0;
T10_5 = 0;
T10_6 = 0;
T10_7 = sin(0.1*pi);
T20 = sin(0.2*pi);
T30 = sin(0.3*pi);
T40 = sin(0.4*pi);
T50 = sin(0.5*pi);
T60 = sin(0.6*pi);
T70 = sin(0.7*pi);
T80 = sin(0.8*pi);
T90 = sin(0.9*pi);
fprintf('! t = 0 !%5.0f !%7.4f !%4.0f
! \n', T00, T10, T20, T30, T40, T50, T60, T70, T80, T90, T10_0)
% Untuk j = 0
epsilon = 0.000001;
x = 1;
% Perkiraan Awal Temperatur Pada Masing-Masing Titik :
T21 = 0;
T31 = 0;
T41 = 0;
T51 = 0;
T61 = 0;
T71 = 0;
T81 = 0;
T91 = 0;
Tt91 = 0;
% Perhitungan temperatur setiap titik :
format short g
iterasi = 0;
while x >= epsilon
iterasi = iterasi + 1;
T11 = (-8*T10+5*T20+5*T00+5*T01+5*T21)/12;
T21 = (-8*T20+5*T30+5*T10+5*T11+5*T31)/12;
T31 = (-8*T30+5*T40+5*T20+5*T21+5*T41)/12;
T41 = (-8*T40+5*T50+5*T30+5*T31+5*T51)/12;
T51 = (-8*T50+5*T60+5*T40+5*T41+5*T61)/12;
T61 = (-8*T60+5*T70+5*T50+5*T51+5*T71)/12;
T71 = (-8*T70+5*T80+5*T60+5*T61+5*T81)/12;
T81 = (-8*T80+5*T90+5*T70+5*T71+5*T91)/12;
T91 = (-8*T90+5*T10_0+5*T80+5*T81+5*T10_1)/12;

```

```

x = abs(T91-Tt91);
Tt91 = T91;
end
fprintf('! t = 0.05 !%5.0f !%7.4f !%7.4f !%7.4f !%7.4f !%7.4f !%7.4f !%7.4f !%7.4f !%7.4f !%4.0f
!\n', T01, T11, T21, T31, T41, T51, T61, T71, T81, T91, T10_1)
% Untuk j = 1
epsilon = 0.000001;
x = 1;
% Perkiraan Awal Temperatur Pada Masing-Masing Titik :
T22 = 0;
T32 = 0;
T42 = 0;
T52 = 0;
T62 = 0;
T72 = 0;
T82 = 0;
T92 = 0;
Tt92 = 0;
% Perhitungan temperatur setiap titik :
format short g
iterasi = 0;
while x >= epsilon
iterasi = iterasi + 1;
T12 = (-8*T11+5*T21+5*T01+5*T02+5*T22)/12;
T22 = (-8*T21+5*T31+5*T11+5*T12+5*T32)/12;
T32 = (-8*T31+5*T41+5*T21+5*T22+5*T42)/12;
T42 = (-8*T41+5*T51+5*T31+5*T32+5*T52)/12;
T52 = (-8*T51+5*T61+5*T41+5*T42+5*T62)/12;
T62 = (-8*T61+5*T71+5*T51+5*T52+5*T72)/12;
T72 = (-8*T71+5*T81+5*T61+5*T62+5*T82)/12;
T82 = (-8*T81+5*T91+5*T71+5*T72+5*T92)/12;
T92 = (-8*T91+5*T10_1+5*T81+5*T82+5*T10_2)/12;
x = abs(T92-Tt92);
Tt92 = T92;
end
fprintf('! t = 0.10 !%5.0f !%7.4f !%7.4f !%7.4f !%7.4f !%7.4f !%7.4f !%7.4f !%7.4f !%7.4f !%4.0f
!\n', T02, T12, T22, T32, T42, T52, T62, T72, T82, T92, T10_2)
% Untuk j = 2
epsilon = 0.000001;
x = 1;
% Perkiraan Awal Temperatur Pada Masing-Masing Titik :
T23 = 0;
T33 = 0;
T43 = 0;
T53 = 0;
T63 = 0;
T73 = 0;
T83 = 0;
T93 = 0;
Tt93 = 0;
% Perhitungan temperatur setiap titik :
format short g
iterasi = 0;
while x >= epsilon
iterasi = iterasi + 1;
T13 = (-8*T12+5*T22+5*T02+5*T03+5*T23)/12;
T23 = (-8*T22+5*T32+5*T12+5*T13+5*T33)/12;
T33 = (-8*T32+5*T42+5*T22+5*T23+5*T43)/12;
T43 = (-8*T42+5*T52+5*T32+5*T33+5*T53)/12;
T53 = (-8*T52+5*T62+5*T42+5*T43+5*T63)/12;
T63 = (-8*T62+5*T72+5*T52+5*T53+5*T73)/12;
T73 = (-8*T72+5*T82+5*T62+5*T63+5*T83)/12;
T83 = (-8*T82+5*T92+5*T72+5*T73+5*T93)/12;
T93 = (-8*T92+5*T10_2+5*T82+5*T83+5*T10_3)/12;
x = abs(T93-Tt93);
Tt93 = T93;
end
fprintf('! t = 0.15 !%5.0f !%7.4f !%7.4f !%7.4f !%7.4f !%7.4f !%7.4f !%7.4f !%7.4f !%7.4f !%4.0f
!\n', T03, T13, T23, T33, T43, T53, T63, T73, T83, T93, T10_3)
% Untuk j = 3
epsilon = 0.000001;
x = 1;
% Perkiraan Awal Temperatur Pada Masing-Masing Titik :
T24 = 0;
T34 = 0;
T44 = 0;
T54 = 0;
T64 = 0;
T74 = 0;
T84 = 0;
T94 = 0;
Tt94 = 0;

```

```

% Perhitungan temperatur setiap titik :
format short g
iterasi = 0;
while x >= epsilon
iterasi = iterasi + 1;
T14 = (-8*T13+5*T23+5*T03+5*T04+5*T24)/12;
T24 = (-8*T23+5*T33+5*T13+5*T14+5*T34)/12;
T34 = (-8*T33+5*T43+5*T23+5*T24+5*T44)/12;
T44 = (-8*T43+5*T53+5*T33+5*T34+5*T54)/12;
T54 = (-8*T53+5*T63+5*T43+5*T44+5*T64)/12;
T64 = (-8*T63+5*T73+5*T53+5*T54+5*T74)/12;
T74 = (-8*T73+5*T83+5*T63+5*T64+5*T84)/12;
T84 = (-8*T83+5*T93+5*T73+5*T74+5*T94)/12;
T94 = (-8*T93+5*T10_3+5*T83+5*T84+5*T10_4)/12;
x = abs(T94-Tt94);
Tt94 = T94;
end
fprintf('! t = 0.20 !%5.0f !%7.4f !%4.0f
!\n', T04, T14, T24, T34, T44, T54, T64, T74, T84, T94, T10_4)
% Untuk j = 4
epsilon = 0.000001;
x = 1;
% Perkiraan Awal Temperatur Pada Masing-Masing Titik :
T25 = 0;
T35 = 0;
T45 = 0;
T55 = 0;
T65 = 0;
T75 = 0;
T85 = 0;
T95 = 0;
Tt95 = 0;
% Perhitungan temperatur setiap titik :
format short g
iterasi = 0;
while x >= epsilon
iterasi = iterasi + 1;
T15 = (-8*T14+5*T24+5*T04+5*T05+5*T25)/12;
T25 = (-8*T24+5*T34+5*T14+5*T15+5*T35)/12;
T35 = (-8*T34+5*T44+5*T24+5*T25+5*T45)/12;
T45 = (-8*T44+5*T54+5*T34+5*T35+5*T55)/12;
T55 = (-8*T54+5*T64+5*T44+5*T45+5*T65)/12;
T65 = (-8*T64+5*T74+5*T54+5*T55+5*T75)/12;
T75 = (-8*T74+5*T84+5*T64+5*T65+5*T85)/12;
T85 = (-8*T84+5*T94+5*T74+5*T75+5*T95)/12;
T95 = (-8*T94+5*T10_4+5*T84+5*T85+5*T10_5)/12;
x = abs(T95-Tt95);
Tt95 = T95;
end
fprintf('! t = 0.25 !%5.0f !%7.4f !%4.0f
!\n', T05, T15, T25, T35, T45, T55, T65, T75, T85, T95, T10_5)
% Untuk j = 5
epsilon = 0.0000001;
x = 1;
% Perkiraan Awal Temperatur Pada Masing-Masing Titik :
T26 = 0;
T36 = 0;
T46 = 0;
T56 = 0;
T66 = 0;
T76 = 0;
T86 = 0;
T96 = 0;
Tt96 = 0;
% Perhitungan temperatur setiap titik :
format short g
iterasi = 0;
while x >= epsilon
iterasi = iterasi + 1;
T16 = (-8*T15+5*T25+5*T05+5*T06+5*T26)/12;
T26 = (-8*T25+5*T35+5*T15+5*T16+5*T36)/12;
T36 = (-8*T35+5*T45+5*T25+5*T26+5*T46)/12;
T46 = (-8*T45+5*T55+5*T35+5*T36+5*T56)/12;
T56 = (-8*T55+5*T65+5*T45+5*T46+5*T66)/12;
T66 = (-8*T65+5*T75+5*T55+5*T56+5*T76)/12;
T76 = (-8*T75+5*T85+5*T65+5*T66+5*T86)/12;
T86 = (-8*T85+5*T95+5*T75+5*T76+5*T96)/12;
T96 = (-8*T95+5*T10_5+5*T85+5*T86+5*T10_6)/12;
x = abs(T96-Tt96);
Tt96 = T96;
end
fprintf('! t = 0.30 !%5.0f !%7.4f !%4.0f
!\n', T06, T16, T26, T36, T46, T56, T66, T76, T86, T96, T10_6)
disp('=====')

```