Analisis Penyelesaian Integrasi Perkalian dalam Membentuk Model Peluang Kebangkrutan Suatu Perusahaan Asuransi

YULI ANDRIANI
Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Sriwijaya, Sumatera Selatan, Indonesia

ABSTRACT: Traditional techniques used to compute the probability of ultimate ruin converge slowly to desired probabilities. Product integration can be used in such situations to yield fast and accurate estimates of ruin probabilities. Since product integration uses quadrature weights suited to the underlying distribution. Especially when claims risk model are from a heavy-tailed distribution, such as Weibull distribution.

KEYWORDS: product integration, convergence, heavy-tailed distributions.

September 2009

1 PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Kebangkrutan secara teori dapat diprediksi melalui peluang kebangkrutan. Peluang bangkrut yaitu peluang terjadinya kebangkrutan pertama kali terjadi pada suatu perusahaan asuransi jika dilihat dari fungsi surplusnya yaitu fungsi yang memuat sejumlah variabel cadangan awal (modal), harga premi dan waktunya dalam jangka panjang sehingga fungsi surplusnya menjadi minus atau bernilai negatif.

Dalam menghitung peluang ruin ada metode yang dapat dipakai yaitu Metode Kombinasi Eksponensial. Pada metode Kombinasi Eksponensial besarnya klaim tidak harus Non-negatif[1]. Metode Rekursip dengan menggunakan *shift* untuk pendekatan mencari peluang kebangkrutan pun telah dilakukan untuk memperoleh ekspresi rekursip. Pendekatan-pendekatan rekursip ini mungkin dapat untuk menentukan peluang kebangkrutan untuk beberapa derajat keakuratan yang diinginkan. Pendekatan rekursip ini tidak ada yang cocok untuk *Heavy-Tailed distribution*, seperti distribusi Weibull.

Persamaan Integrasi Perkalian hanya cocok untuk *Heavy-Tailed distribution*, yaitu distribusi yang mempunyai varian yang besar. Persamaan Integrasi Perkalian tidak dapat dihitung secara langsung karena terdapat perkalian dua fungsi di dalam integral dimana salah satu fungsinya tidak diketahui. Untuk dapat menggunakan persamaan Integrasi Perkalian haruslah dianalisis dulu, sehingga terbentuk persamaan baru yang akan digunakan untuk menghitung peluang kebangkrutan.

1.2 Tinjauan Pustaka

Fungsi surplus didefinisikan sebagai

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0.$$

Jadi surplus adalah selisih antara modal awal ditambah dengan premi yang diterima dengan klaim yang dibayarkan.

Peluang ruin Surplus bisa bernilai positif maupun negatif. Pada saat tertentu surplus bernilai negatif. Jika surplus bernilai negatif terjadi untuk pertama kalinya maka dikatakan telah terjadi ruin. Perhitungan peluang terjadinya ruin sangatlah berguna dalam mengukur risiko keuangan atau finansial suatu perusahaan asuransi[2–4]. Misalkan $U(t)$ adalah fungsi surplus, maka

$$T = \min \{t \text{ dan } U(t) < 0;\ t \geq 0\} \tag{1}$$

menyatakan saat ruin dengan pengertian $T = \infty$ jika $U(t) \geq 0,\ \forall t \geq 0$. Peluang terjadinya ruin, jika dana awal u, didefinisikan

$$\psi(u) = P(T < \infty). \tag{2}$$

Dalam prakteknya akan lebih realistis jika kita mengamati peluang ruin untuk jangka waktu yang panjang tapi berhingga, misalkan t. Peluang terjadinya ruin sebelum waktu t, jika dana awal u, didefinisikan

$$\psi(u) = P(T < t) = P(U(s) < 0,\ 0 \leq s \leq t). \tag{3}$$

Jika $\{U(t),\ t \geq\}$ menyatakan proses surplus dengan $\{S(t),\ t \leq 0\}$ proses klaim *aggregate* yang berdistribusi Poisson majemuk, dengan $c > \lambda p_1$ dan $c =$

$(1+\theta)\lambda p_1$, maka untuk $u > 0$

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(t)}|T < \infty]}. \tag{4}$$

R adalah koefisien penyesuaian (*adjusment coefficient*), yaitu bilangan positif terkecil yang memenuhi persamaan $M_{S(t)-ct}(r) = 1$, dengan $M_{S(t)-ct}(r)$ adalah fungsi pembangkit momen dari $S(t) - ct$[5].

Kesulitan dalam menghitung peluang ruin $\psi(u)$ ialah mencari bentuk eksplisit bagi $E[e^{-RU(T)}|T < \infty]$. Salah satu cara mengatasinya ialah dengan menghampiri nilai peluang ruin tersebut dengan batas atasnya yaitu e^{-Ru}.

Jika diasumsikan $P(0) = 0$, atau dengan kata lain tidak terjadi klaim negatif, maka untuk dana awal $u = 0$, peluang surplus $U(t) < 0$ adalah

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}. \tag{5}$$

Integrasi perkalian Perhatikan penyelesaian numerik dari persamaan integral Volterra[6,7],

$$x(s) = y(s) + \int_a^s k(s,t)x(t)dt, \quad a \le s \le b \tag{6}$$

dengan $k(.,.)$ kernel (diketahui) dan $x(.)$ fungsi yang tak diketahui untuk ditentukan. Asumsi $k(.,.)$ atau satu dari turunan orde rendahnya tidak baik dilakukan dalam satu dari argumennya. (Untuk contoh, $k(.,.)$ mungkin singular atau hampir singular).

Heavy-Tailed distribution adalah fungsi distribusi yang asimetris. Kemiringannya tergantung pada nilai parameternya. Ekor dari distribusi ini tebal, menunjukkan nilai variansi yang besar. Dalam dunia nyatanya. yaitu dunia asuransi, ini adalah kejadian yang sangat jarang terjadi apabila terjadi perusahaan asuransi harus mengeluarkan dana yang besar. Seperti banjir besar di Jakarta tahun 2002, kejadian 11 September 2001, yaitu World Trade Center dan gempa bumi dan badai Tsunami 26 Desember 2004 di Aceh.

Di sini, diambil satu distribusi yang termasuk dalam *heavy tailed distribution* yaitu distribusi Weibull.

Distribusi weibull Teknologi modern telah memungkinkan orang merancang banyak system yang rumit yang penggunaannya atau keamanannya, bergantung pada keandalan berbagai komponen dalam system ini. Sebagai contoh suatu sekering mungkin putus atau alat pengindera panas tak bekerja. Komponen yang sama dalam lingkungan yang sama akan rusak dalam waktu yang berlainan yang tidak dapat diramalkan. Disini distribusi Weibull telah banyak dipakai akhir-akhir ini dalam menangani masalah ini.

Distribusi Weibull dikenalkan oleh fisikawan Swedia Waloddi Weibull pada tahun 1939. Peubah acak kontinu t berdistribusi Weibull dengan paremeter α dan β. Fungsi padat peluangnya berbentuk:

$$f(t) = \begin{cases} \alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\alpha t\beta}, \ t > 0 \\ 0, \text{ untuk } t \text{ yang lain} \end{cases} \tag{7}$$

dengan $\alpha, \beta > 0$.

1.3 Tujuan Penelitian

1. Menganalisis persamaan Integrasi Perkalian sehingga terbentuk persamaan yang baru yang lebih efektif dan efisien sehigga dapat langsung digunakan untuk menghitung peluang kebangkrutan.
2. Membuat program komputer persamaan Integrasi Perkalian.

2 METODE

Tahapan-tahapan yan dilakukan untuk menyelesaikan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Persamaan Integral Perkalian, $x(s) = y(s) + \int_a^s k(s,t)x(t)dt$, dengan nilai s terletak dalam interval $a \le s \le b$. Persamaan ini tidak dapat langsung diselesaikan dan digunakan karena terdapat perkalian $k(s,t)$ dan $x(t)$. Untuk dapat menggunakannya harus dianalisis dulu, dengan memfaktorkan $k(s,t)$ menjadi $k(s,t) = p(s,t)\overline{k}(s,t)$ dan menguraikan bagian integralnya menjadi n subinterval $\{h_i\}$ dengan , dengan $h_i = s_{i+1} - s_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$
2. Asumsikan $\overline{k}(s,t)x(t)$ linear di t, dan gunakan interpolasi linear, yaitu,
$$\begin{aligned}\overline{k}(s_i,t)x(t) \approx \ & \frac{t_{j+1}-t}{h_j}\,\overline{k}(s_i,t_j)x(t_j) + \\ & \frac{t-t_j}{h_j}\,\overline{k}(s_i,t_{j+1})x(t_{j+1})\end{aligned}$$
3. Diberikan dua variabel baru yaitu
$$\nu_{ij} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{j+1}-t)p(s_i,t)dt$$
dan
$$c_{ij} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} p(s_i,t)dt$$
4. Diperoleh persamaan baru, dan nilai awalnya
5. Menghitung peluang ruinya dengan persamaan
$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta}\left(A(u) + \int_0^u K(u,t)\psi(t)dt\right), \ u \ge 0$$

dengan

$$A(u) = \int_u^\infty \frac{1 - F(t)}{p_1}\, dt, \quad u \geq 0$$

dan

$$K(u,t) = \frac{1 - F(u-t)}{p_1}, \quad 0 \leq t \leq u$$

,

6. Setelah terbentuk persamaan Integrasi Perkalian yang baru, dibuat algoritma programnya
7. Pembuatan program komputer berdasarkan algoritma[8] yang telah dibuat dengan menggunakan bahasa pemrograman
8. Pengujian Program.

3 HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Analisis Integrasi Perkalian

Perhatikan penyelesaian numerik dari persamaan integral Volterra,

$$x(s) = y(s) + \int_a^s k(s,t)x(t)dt, \quad a \leq s \leq b \qquad (8)$$

dengan $k(.,.)$ adalah kernel (diketahui) dan $x(.)$ merupakan fungsi yang tak diketahui (untuk ditentukan). Asumsi $k(.,.)$ atau satu dari turunan orde rendahnya tidak baik dilakukan dalam satu dari argumennya. (Untuk contoh, $k(.,.)$ mungkin singular atau hampir singular).

Pertama kita faktorisasi $k(s,t)$ sebagai

$$k(s,t) = p(s,t)\overline{k}(s,t)$$

dengan $\overline{k}(.,.)$ adalah *smooth* dan baik − ditunjukkan dan dapat didekati akuratnya dengan suatu polinomial interpolasi Lagrange yang sesuai, dan $p(s,t)$ tidak baik dilakukan. Kemudian kita uraikan interval $[a,b]$ dalam n subinterval $\{h_i\}$ dengan $h_i = s_{i+1} - s_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ dan $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b$. Karena itu

$$\int_a^{s_i} p(s_i,t)\overline{k}(s_i,t)x(t)dt = \sum_{i=1}^{i} \int_{s_{i-1}}^{s_i} p(s_i,t)\overline{k}(s_i,t)x(t)dt$$

Misal, $i = j+1$ maka untuk $i = 1$ menghasilkan $j = 0$ dan $j = i+1 \rightarrow i = i$ dan $j = i-1$ sehingga ruas kanan persamaan di atas dapat dituliskan sebagai

$$\sum_{j=0}^{i-1} \int_{s_j}^{s_{j+1}} p(s_i,t)\overline{k}(s_i,t)x(t)dt$$

dan karena $s_i = t_i$ atau $s_j = t_j$, maka

$$\int_a^{s_i} p(s_i,t)\overline{k}(s_i,t)x(t)dt = \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} p(s_i,t)\overline{k}(s_i,t)x(t)dt. \qquad (9)$$

Karena dalam tulisan ini diasumsikan $\overline{k}(s_i,t)x(t)$ linear $(d = 1)$ di t, yaitu

$$\overline{k}(s_i,t)x(t) \approx \frac{t_{j+1} - t}{h_j}\, \overline{k}(s_i,t_j)x(t_j) + \frac{t - t_j}{h_j}\, \overline{k}(s_i,t_{j+1})x(t_{j+1})$$

maka pers.(9) menjadi

$$\int_a^{s_i} p(s_i,t)\overline{k}(s_i,t)x(t)dt \approx \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} p(s_i,t) \left(\frac{t_{j+1} - t}{h_j}\, \overline{k}(s_i,t_j)x(t_j) + \frac{t - t_j}{h_j}\, \overline{k}(s_i,t_{j+1})x(t_{j+1}) \right) dt. \qquad (10)$$

Uraian ruas kanan pers.(10) menghasilkan:

- Untuk $j = 0$

$$w_{i0} = \int_{t_0}^{t_1} p(s_i,t)\, \frac{t_1 - t}{h_0}\, dt$$

- Untuk $j = 1, 2, \ldots, i-1$

$$w_{ij} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} p(s_i,t)\, \frac{t_{j+1} - t}{h_j}\, dt + \int_{t_{j-1}}^{t_j} p(s_i,t)\, \frac{t - t_{j-1}}{h_{j-1}}\, dt$$

- Untuk $j = i$

$$w_{ii} = \int_{t_{i-11}}^{t_i} p(s_i,t)\, \frac{t - t_{i-1}}{h_{i-1}}\, dt$$

Dari uraikan di atas, secara umum pers.(9) dapat dituliskan sebagai

$$\int_a^{s_i} p(s_i,t)\overline{k}(s_i,t)x(t)dt = \sum_{j=0}^{i} w_{ij}\overline{k}(s_i,t_j)x(t_j). \qquad (11)$$

Kemudian, penyelesaikan yang mendekati ke pers.(8) ditentukan oleh rekursip menggunakan

$$\hat{x}_n(s_i) = y(s_i) + \sum_{j=0}^{i} w_{ij}\overline{k}(s_i,t_j)\hat{x}_n(t_j). \qquad (12)$$

dengan $i = 1, 2, \ldots, n$, dan

$$\hat{x}_n(s_0) = y(a). \tag{13}$$

Estimasi hasil dari $x(s)$ adalah $\hat{x}_n(s_n)$.

Selanjutnya, peluang ruinnya dapat dihitung menggunakan kaitan

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta}\left(A(u) + \int_0^u K(u,t)\psi(t)dt\right),\ u \geq 0 \tag{14}$$

dengan

$$A(u) = \int_0^{infty} \frac{1-F(t)}{p_1}\,dt, \quad u \geq 0 \tag{15}$$

$$K(u,t) = \frac{1-F(u-t)}{p_1}, \quad 0 \leq t \leq u. \tag{16}$$

3.2 Algoritma Program

Input

`Nilai koefisien` $n, A(1), A(2), B(1), B(2), r_1$ `dan` $r(2)$

Proses

```
for h←1:n
  sum(1)←0;sum(2)←0;sum(3)←0;
  for t←1:n
  sum(1)←sum(1)+A(t)/(B(t)-r(h))
  sum(2)←sum(2)+A(t)/B(t)
  sum(3)←sum(3)+A(t)/(B(t)-r(h))ˆ2
  end
  D(h)←(sum(1)-sum(2))/(r(h)*sum(3))
end
for j←1:n
  C(j)←D(j)
end
menghitung peluang ruin
for i←1:20
  u(i+1)←u(i)+0.5
  ruin(i)←0
  for m←1:n
    ruin(i)←ruin(i)+C(m)*exp(-r(m)*u(i))
  end
end
ruin(21)←0
```

Output

```
for z←1:n
  ruin(21)←ruin(21)+C(z)*exp(-r(z)*u(21))
end
```

Dari algoritma di atas, dibuat program simulasi yang hasilnya seperti dalam Tabel 1.

Berdasarkan Tabel 1, dapat dilihat bahwa semakin besar cadangan awalnya (u) dan semakin besar *security loading*-nya (θ) semakin kecil terjadinya kebangkrutan.

4 SIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Perhitungan peluang kebangkrutan menggunakan persamaan Integrasi Perkalian harus dianalisis dulu menghasilkan persamaan baru yaitu

$$\hat{x}_n(s_i) = y(s_i) + \sum_{j=0}^{i} w_{ij}\overline{k}(s_i,t_j)\hat{x}_n(t_j).$$

2. Perhitungan peluang ruin dengan manual sangatlah rumit dan panjang. Kita harus mencari koefisien-koefisien dulu kemudian mengubah fungsi yang baru untuk menghitung besarnya klaim, nilai ekspektasi, akar-akar persamaan peluang ruin baru dapat menghitung peluang ruin jika dibandingkan dengan menghitung peluang ruin dengan program.

3. Peluang kebangkrutan untuk distribusi Weibull tergantung pada cadangan awal (u) dan *security loading*-nya (θ). Semakin besar cadangan awal dan semakin besarnya nilai *security loading*-nya, peluang kebangkrutan semakin kecil.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Andriani, Y., 2005, Simulasi peluang ruin pada distribusi kombinasi eksponensial, *JPS FMIPA UNSRI*, Sumatera Selatan

[2] Dickson, D.C.M., 1989, Recursive calculation of the probability and severity of ruin. *J. Insurance: Mathematics and Economics*, 8, hal. 145-148

[3] Panjer, H.H., 1986, Direct calculation of ruin probabilities, *J. Risk and Insurance*, 53, hal. 521-429

[4] Ramsay, C.M., 1992, A practical algorithm for approximating the probability of ruin, *Transactions of the Society of Actuaries*, XLIV, hal. 443-459

[5] Bowers, N.L., H.U. Gerber, J.C. Hickman, D.A. Jones, and C.J. Nesbitt, 1997, Actuarial Mathematics, *Ithasca III: Society of Actuaries*, hal. 417-430

[6] Delves, L.M. dan J.L. Mohamed, 1989, *Computational Methods for Integral Equations*, Cambridge University Press, Cambridge

[7] Linz, P., 1985, *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations*, Pa.: SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia

[8] Goovaerts, M. dan F. De Vylder, 1984, A stable recursive algorithm for evaluation of ultimate ruin probabilities, *J. Astin Bulletin*, 14, hal. 53-59

Tabel 1: Peluang Kebangkrutan Distribusi Weibull untuk Berbagai Nilai u dan θ untuk kasus khusus $\alpha = 1$ dan $\beta = 1$

u	$\psi(u)$ untuk macam-macam nilai θ				
	$\theta = 0.1$	$\theta = 0.25$	$\theta = 0.5$	$\theta = 0.75$	$\theta = 1$
10	0.3662639	0.1082682	0.0237827	0.0078650	0.0033689
20	0.1475642	0.0146525	0.0008485	0.0001083	2.26999e-5
30	0.0594522	0.0019830	3.02666e-5	1.48996e-6	1.52951e-7
40	0.0239527	0.0002684	1.07973e-6	2.05075e-8	1.03058e-9
50	0.0096503	3.63199e-5	3.85183e-8	2.82261e-10	6.94397e-12
60	0.0038880	4.91537e-6	1.37410e-9	3.88499e-12	4.67881e-14
70	0.0015664	6.65223e-7	4.90197e-11	5.34721e-14	3.15256e-16
80	0.0006311	9.00281e-8	1.74873e-12	7.35979e-16	2.12418e-18
90	0.0002543	1.21840e-8	6.23842e-14	1.01299e-17	1.43126e-20
100	0.0001024	1.64892e-9	2.22550e-15	.39425e-19	9.64375e-23
200	1.15437e-8	3.39868e-18	7.42922e-30	3.40189e-38	1.86004e-44
300	1.30081e-12	7.00521e-27	2.48005e-44	8.30042e-57	3.58755e-66
400	1.46582e-16	1.44388e-35	8.27900e-59	2.02529e-75	6.91948e-88
500	1.65177e-20	2.97606e-44	2.76373e-73	4.94150e-94	1.33460e-109
600	1.86130e-24	6.13412e-53	9.22598e-88	1.20570e-112	2.57410e-131
700	2.09744e-28	1.26434e-61	3.07985e-102	2.94183e-131	4.96480e-153
800	2.36349e-32	2.60599e-70	1.02813e-116	7.17789e-150	9.57585e-175
900	2.66331e-36	5.37135e-79	3.43213e-131	1.75136e-168	1.84694e-196
1000	3.00117e-40	1.10712e-87	1.14573e-145	4.27322e-187	3.56229e-218