Model Stokastik Proses Kelahiran Cluster Yule-Furry Berdasarkan Jenis Kelamin

Ngudiantoro
Jurusan Matematika, Universitas Sriwijaya, Sumatera Selatan, Indonesia

Intisari: Penelitian bertujuan untuk merumuskan model stokastik proses kelahiran cluster Yule-Furry berdasarkan jenis kelamin, karena model stokastik dari proses ini belum disajikan, sementara banyak fenomena alam dapat menggambarkan suatu peristiwa dari proses stokastik tersebut. Perumusan model stokastik ini pada prinsipnya ditujukan untuk mendapatkan bentuk postulat dan model persamaan diferensial. Hasil dari penelitian ini adalah postulat dan model persamaan diferensial proses kelahiran cluster Yule-Furry berdasarkan jenis kelamin.

Kata kunci: model stokastik, proses kelahiran cluster, jenis kelamin, proses Yule-Furry

Abstract: The study aims to formulate a stochastic model of the cluster birth process by sex on the Yule-Furry process, because the stochastic model of this process has not been presented, while many natural phenomena can describe an event of such stochastic processes. The formulation of stochastic models is principally aimed to get the postulates model and differential equations. The results of this study are the postulates model and the differential equations of the cluster birth process by sex on the Yule-Furry process.

Keywords: stochastic model, the cluster birth process, sex, the Yule-Furry process

E-mail: ngudiantoro@yahoo.com

Juli 2011

1 PENDAHULUAN

Peranan model stokastik dalam merumuskan fenomena alam sangat dominan, karena pada prinsipnya model stokastik lebih realistik dalam menangkap indikasi alam yang dinamis dan relatif dengan melibatkan unsur waktu dan ruang pada setiap pemodelan fenomena alam yang dibentuknya. Pada dasarnya, fenomena alam sangat sensitif terhadap perubahan yang diakibatkan oleh waktu dan ruang, sehingga model stokastik lebih representatif dalam memanifestasikan fenomena alam dalam bentuk suatu model.

Salah satu proses yang spesifik dari proses stokastik adalah proses stokastik dengan waktu kontinu dan ruang state diskret, proses ini disebut dengan proses cacah [1], sedangkan proses cacah yang berupa suatu model dari fenomena alam yaitu proses Poisson. Salah satu bentuk pengembangan dari proses Poisson adalah dengan mengijinkan suatu peristiwa yang terjadi pada selang waktu tertentu bergantung pada banyaknya peristiwa yang telah terjadi sebelumnya, contoh dari fenomena ini adalah proses kelahiran (*birth process*).

Proses kelahiran yang banyak dibahas adalah proses kelahiran murni (*pure birth process*) [2,3,4,5]. Sementara itu, banyak fenomena dalam kehidupan seharihari dapat menggambarkan suatu keadaan dimana suatu peristiwa dapat terjadi secara serentak atau bersamaan dalam selang waktu tertentu, misalnya suatu proses memecah diri (lahirnya individu baru) yang terjadi secara serentak dalam selang waktu dan ruang tertentu. Keadaan ini tidak lain merupakan gambaran dari proses kelahiran cluster (*cluster birth process*).

Selanjutnya, kenyataan juga menunjukkan bahwa suatu individu (mahluk hidup) dapat dibedakan atas dua jenis kelamin, yaitu laki-laki dan perempuan. Karena proses kelahiran tergantung pada banyaknya individu perempuan dalam suatu populasi dan individu yang lahir juga dapat dibedakan atas dua jenis kelamin, maka dengan sendirinya proses kelahiran juga dipengaruhi oleh jenis kelamin. Oleh karena itu, perlu kiranya untuk dikaji dan dirumuskan suatu model stokastik dari proses tersebut.

Pengembangan model stokastik proses kelahiran murni terus dilakukan, antara lain telah dibangun model stokastik proses kelahiran Yule-Furry berdasarkan jenis kelamin [6]. Namun model stokastik tersebut untuk proses kelahiran murni, sedangkan untuk proses kelahiran cluster masih belum disajikan. Penelitian ini bertujuan untuk membangun model stokastik proses kelahiran cluster Yule-Furry berdasarkan jenis kelamin. Model tersebut merupakan bentuk pengem-

© 2011 FMIPA Universitas Sriwijaya

bangkan dari model stokastik proses kelahiran Yule-Furry berdasarkan jenis kelamin yang telah dibangun sebelumnya. Pengembangan model dititikberatkan pada perumusan postulat dan pemodelan persamaan diferensial.

2 PROSES KELAHIRAN MURNI (*PURE BIRTH PROCESS*)

Jika $\{\lambda_k\}$ adalah suatu barisan bilangan positif, maka suatu proses kelahiran murni (*pure birth process*) didefinisikan sebagai sebuah proses Markov yang memenuhi postulat di bawah ini[4,5]

i) $P[N(t,t+\Delta t)=1|N(t)=k]=\lambda_k\Delta t+O(t)$;
ii) $P[N(t,t+\Delta t)=0|N(t)=k]=$
$1-\lambda_k\Delta t+O(t)$; dan
iii) $P[N(t,t+\Delta t)>1|N(t)=k]=O(t)$; (1)
dengan $k=0,1,2,\ldots$

Untuk $\Delta t>0$, maka diperoleh model persamaan diferensial proses kelahiran murni yang dinyatakan dengan persamaan[4,5]

$$P'_n(t)=-\lambda_n P_n(t)+\lambda_{n-1}P_{n-1}(t);\ n\geq 1 \qquad (2)$$

3 PROSES KELAHIRAN YULE-FURRY

Proses Poisson di mana λ_n merupakan fungsi dari n disebut proses kelahiran murni (*pure birth process*), sedangkan untuk $\lambda_n=n\lambda$ yang bersifat linier disebut proses kelahiran Yule-Furry, yaitu laju kelahiran sebanding dengan ukuran populasinya[4]. Jika $N(t)$ menyatakan banyaknya populasi pada waktu t dan $P_n(t)=P[N(t)=n]$, dengan mengambil $\lambda_n=n\lambda$ maka $P_n(t)$ dapat diperoleh dari persamaan

$$P'_n(t)=-n\lambda P_n(t)+(n-1)\lambda P_{n-1}(t); n\geq 1 \qquad (3)$$

dan

$$P'_0(t)=0 \qquad (4)$$

Jika syarat awal diberikan, maka $P_n(t)$ dapat dinyatakan secara eksplisit.

4 PROSES KELAHIRAN YULE-FURRY BERDASARKAN JENIS KELAMIN

Jika $\lambda_n=n\lambda$ adalah suatu barisan bilangan positif, maka suatu proses kelahiran Yule-Furry berdasarkan jenis kelamin didefinisikan sebagai sebuah proses Markov yang memenuhi postulat di bawah ini[6]

i) $P[N(t,t+\Delta t)=1|N(t)=i-1,j]=$
$(i-1)\lambda_1\Delta t+O(\Delta t)$;
ii) $P[N(t,t+\Delta t)=1|N(t)=i,j-1]=$
$i\lambda_2\Delta t+O(\Delta t)$;
iii) $P[N(t,t+\Delta t)=0|N(t)=i,j]=$
$1-i(\lambda_1+\lambda_2)\Delta t+O(\Delta t)$;
iv) $P[N(t,t+\Delta t)=m|N(t)=i-m,j]=O(\Delta t)$; dan
v) $P[N(t,t+\Delta t)=m|N(t)=i,j-m]=O(\Delta t)$;
dengan $m=2,3,4,\ldots$ (5)

Untuk $\Delta t>0$, maka diperoleh model persamaan diferensial proses kelahiran Yule-Furry berdasarkan jenis kelamin yang dinyatakan dengan persamaan[6]

$$\begin{aligned}P'_{i,j}(t) &= -i(\lambda_1+\lambda_2)P_{i,j}(t)\\ &\quad +(i-1)\lambda_1 P_{i-1,j}(t)+i\lambda_2 P_{i,j-1}(t);\end{aligned} \qquad (6)$$

dengan $i,j\geq 1$

5 PROSES KELAHIRAN CLUSTER YULE-FURRY BERDASARKAN JENIS KELAMIN

Proses kelahiran cluster Yule-Furry berdasarkan jenis kelamin merupakan satu bentuk pengembangan dari proses kelahiran murni. Dalam selang waktu yang kecil, katakanlah $(t,t+\Delta t)$, jika $X(t,t+\Delta t)$ menyatakan banyaknya peristiwa yang terjadi dalam selang waktu $(t,t+\Delta t)$ maka $X(t,t+\Delta t)$ merupakan peubah acak dengan asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. $N(t,t+\Delta t)$ menyatakan banyaknya cluster pada waktu $(t,t+\Delta t)$, dan $N(t,t+\Delta t)$ merupakan proses Poisson dengan rata-rata $(\lambda_1+?_2)\Delta t$, dimana λ_1 dan λ_2 berturut-turut menyatakan rata-rata kelahiran individu perempuan dan laki-laki;
2. Tiap cluster memiliki bilangan acak yang menunjukkan banyaknya peristiwa yang terjadi. X_i menyatakan banyaknya peristiwa yang terjadi pada cluster ke-i, dan X_i merupakan peubah acak. Banyaknya peristiwa yang terjadi pada cluster yang berbeda adalah saling bebas dan berdistribusi peluang sama.

Misalkan $X(t)$, sebuah peubah acak, menyatakan banyaknya individu pada waktu t, dan $P[X(t)=n]$ dinyatakan dengan $P_n(t)$. Selanjutnya, individu-individu tersebut dibedakan atas dua jenis kelamin, yaitu individu perempuan (dinyatakan dengan i) dan individu laki-laki (dinyatakan dengan j). Dalam selang waktu $(t,t+\Delta t)$, kemungkinan peristiwa yang terjadi pada proses kelahiran cluster Yule-Furry berdasarkan jenis kelamin adalah *terjadi satu atau lebih kelahiran individu perempuan atau terjadi satu atau lebih kelahiran individu laki-laki atau tidak terjadi kelahiran individu baik perempuan maupun laki-laki.*

Selanjutnya, misalkan $\{\lambda_n = n\lambda\}$ adalah suatu barisan bilangan positif. Jika dalam selang waktu $(t, t+\Delta t)$ setiap anggota populasi memiliki peluang

$$[1/(\sum X_i)]E[X_i]\lambda_1\Delta t + O(\Delta t)$$

untuk lahirnya satu atau lebih individu perempuan dan

$$[1/(\sum X_i)]E[X_i]\lambda_2\Delta t + O(\Delta t)$$

untuk lahirnya satu atau lebih individu laki-laki, maka proses kelahiran cluster Yule-Furry berdasarkan jenis kelamin didefinisikan sebagai suatu proses Markov yang memenuhi postulat di bawah ini

$$\begin{aligned}
&\text{i)}\quad P[X(t,t+\Delta t)=\sum X_i|X(t)=i-\sum X_i,j]=[1/\sum X_i]E[X_i](i-\sum X_i)\lambda_1\Delta t+O(\Delta t);\\
&\text{ii)}\quad P[X(t,t+\Delta t)=\sum X_i|X(t)=i,j-\sum X_i]=[1/\sum X_i]E[X_i]i\lambda_2\Delta t+O(\Delta t);\\
&\text{iii)}\quad P[X(t,t+\Delta t)=0|X(t)=i,j]=1-[1/\sum X_i]E[X_i]i(\lambda_1+\lambda_2)\Delta t+O(\Delta t);\\
&\text{iv)}\quad P[X(t,t+\Delta t)=m\sum X_i|X(t)=i-m\sum X_i,j]=O(\Delta t);\ \text{dan}\\
&\text{v)}\quad P[X(t,t+\Delta t)=m\sum X_i|X(t)=i,j-m\sum X_i]=O(\Delta t);\ \text{dengan } m=2,3,4,\ldots
\end{aligned}\tag{7}$$

Berbagai kemungkinan peristiwa yang terjadi pada proses kelahiran cluster Yule-Furry berdasarkan jenis kelamin dapat dinyatakan dalam bentuk pernyataan peluang sebagai berikut:

$$P_{i,j}(t) = P[X(t)=i,j] \tag{8}$$

atau

$$P_{i,j}(t+\Delta t) = P[X(t+\Delta t)=i,j] \tag{9}$$

Persamaan (9) dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned}
P_(i,j)(t+\Delta t) &= P[X(t)=i,j]P[X(t,t+\Delta t)=0|X(t)=i,j]+P[X(t)=i+\sum X_i,j]P[X(t,t+\Delta t)=\\
&-\sum X_i|X(t)=i+\sum X_i,j]+P[X(t)=i,j+\sum X_i]P[X(t,t+\Delta t)=-\sum X_i|X(t)=\\
i,j+\sum X_i]&+P[X(t)=i+m\sum X_i,j]P[X(t,t+\Delta t)=-m\sum X_i|X(t)=i+m\sum X_i,j]+P[X(t)=\\
&i,j+m\sum X_i]P[X(t,t+\Delta t)=-m\sum X_i|X(t)=i,j+m\sum X_i];\ \text{dengan } m=2,3,4,\ldots
\end{aligned}\tag{10}$$

Dengan menggunakan Persamaan (7) dan (8), maka Persamaan (11) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned}
P_{i,j}(t+\Delta t) &= P_{i,j}(t)\{1-[1/\sum X_i]E[X_i]i(\lambda_1+\lambda_2)\Delta t+O(\Delta t)\}+\\
&P_{i-\sum X_i,j}(t)\{[1/\sum X_i]E[X_i](i-\sum X_i)\lambda_1\Delta t+O(\Delta t)\}+\\
&P_{i,j-\sum X_i}(t)\{[1/\sum X_i]E[X_i]i\lambda_2\Delta t+O(\Delta t)\}+P_{i-m\sum X_i,j}(t)O(\Delta t)+\\
&P_{i,j-\sum X_i}(t)O(\Delta t);\ \text{dengan } m=2,3,4,\ldots
\end{aligned}\tag{11}$$

Selanjutnya, untuk $\Delta t \longrightarrow 0$ maka akan diperoleh

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_{i,j}(t+\Delta t)-P_{i,j}(t)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t\to 0} -[1/\sum X_i]E[X_i]i(\lambda_1+\lambda_2)P_{i,j}(t)+\\
&[1/\sum X_i]E[X_i](i-\sum X_i)\lambda_1 P_{i-\sum X_i,j}(t)+[1/\sum X_i]E[X_i]i\lambda_2 P_{i,j-\sum X_i}(t)+\\
&\{P_{i-m\sum X_i,j}(t)+P_{i,j-\sum X_i}(t)\}\frac{O(\Delta t)}{\Delta t};\ \text{dengan } m=2,3,4,\ldots
\end{aligned}\tag{12}$$

atau

$$P'_{i,j}(t) = -[1/\sum X_i]E[X_i]i(\lambda_1+\lambda_2)P_{i,j}(t) + [1/\sum X_i]E[X_i](i-\sum X_i)\lambda_1 P_{i-\sum X_i,j}(t) + [1/\sum X_i]E[X_i]i\lambda_2 P_{i,j-\sum X_i}(t);\ \text{dengan } i,j \geq \sum X_i \quad (13)$$

Persamaan (14) merupakan model persamaan diferensial dari proses kelahiran cluster Yule-Furry berdasarkan jenis kelamin.

Teorema:

Untuk setiap t, jika

$$G(z_1,z_2;t) = \sum_{i,j=0}^{\infty} z_1^i z_2^j P_{i,j}(t) \quad (14)$$

merupakan fungsi pembangkit peluang dari $X(t)$, maka model persamaan diferensial parsial fungsi pembangkit peluang transisi dari proses kelahiran cluster Yule-Furry berdasarkan jenis kelamin adalah

$$\frac{\partial G(z_1,z_2;t)}{\partial t} = [1/\sum X_i]E[X_i]z_1^{\sum X_i}\left\{-(\lambda_1+\lambda_2)+\lambda_1 z_1^{\sum X_i}+\lambda_2 z_2^{\sum X_i}\right\}\frac{\partial G(z_1,z_2;t)}{\partial z_1} \quad (15)$$

Pembuktian teorema di atas dapat dilakukan dengan menggunakan Persamaan (14) serta hasil diferensial parsial Persamaan (15) terhadap t, z_1,dan z_2.

6 KESIMPULAN

1. Postulat proses kelahiran cluster Yule-Furry berdasarkan jenis kelamin telah diperoleh, dapat dilihat pada Persamaan (7).

2. Model persamaan diferensial dan model persamaan diferensial parsial fungsi pembangkit peluang transisi dari proses kelahiran cluster Yule-Furry berdasarkan jenis kelamin telah diperoleh, berturut-turut dapat dilihat pada Persamaan (14) dan (16).

DAFTAR PUSTAKA

[1] Praptono, 1986, *Pengantar Proses Stokastik*, Penerbit Karunika, Jakarta

[2] Taylor, H.M. and S. Karlin, 1984, *An Introduction to Stochastic Modeling*, Academic Press Inc, Orlando, Florida

[3] Papoulis, A., 1984, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, Second Edition, McGraw-Hill Book Company, New York

[4] Cox, D.R. and H.D. Miller, 1987, *The Theory of Stochastic Processes*, Chapman and Hall, London

[5] Karlin, S. and H.M. Taylor, 1975, *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press Inc, New York

[6] Ngudiantoro, 2001, *Model persamaan diferensial proses stokastik kelahiran Yule-Furry berdasarkan jenis kelamin*, Jurnal Penelitian Sains, 4(1):76-81