Jurnal Penelitian Sains ; hal 15 - 24
No.4. Oktober 1998 ISSN: 1410-7058

KETERAKSESAN SISTEM KONTROL NONLINEAR

Endro S Cahyono
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya

ABSTRAK

Keteraksesan merupakan kondisi perlu suatu sistem yang terkontrol. Dalam tulisan ini, akan dibahas kondisi cukup untuk keteraksesan dari sistem kontrol nonlinear mulus. Bagian akhir kondisi perlu dan cukup untuk keteraksesan dari masalah kontrol posisi benda kaku dianalisis

PENDAHULUAN

Sistem kontrol nonlinear yang ditentukan oleh sejumlah hingga persamaan diferensial biasa dengan kontrol didalamnya, merupakan suatu klas model matematika yang besar dan penting untuk tujuan praktis. Sistem ini dapat digunakan untuk memodelkan dari masalah-masalah fisika, biologi, sosial maupun ekonomi. Contoh : model kontrol lengan robot, model kontrol ekonomi tertutup dan model dari "Mixed Culture Bioreactor".

Sifat keterkontrolan dan keterobservasian untuk sistem linear telah diketahui dan digunakan untuk menganalisis sistem tertentu. Di sini akan dikembangkan sifat keteraksesan untuk sistem kontrol nonlinear. Dalam tulisan ini akan dibahas suatu hasil teori keteraksesan (kondisi cukup untuk keteraksesan) suatu klas model sistem kontrol nonlinear affine mulus yang berbentuk,

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{j=1}^{m} g_j(x)u_j, \qquad \mathbf{u} = (u_1,\ldots,u_m) \in U \subset \mathbf{R}^m$$

dan diterapkan pada masalah kontrol posisi benda kaku.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Manifold dan Medan Vektor

Karena di dalam sistem melibatkan pengertian manifold sebagai "ruang state" dan medan vektor sebagai suatu pemetaan, maka diberikan definisi berikut.

Definisi 1.1 *Suatu manifold mulus adalah manifold topologi yang dilengkapi dengan struktur terdeferensial mulus.*

Definisi 1.2 *Medan vektor X adalah suatu pemetaan yang mengkaitkan setiap $p \in M$ (manifold) ke suatu vektor singgung $X(p) = X_p \in T_pM$ (ruang singgung), dinotasikan*

$$X : M \to TM$$
$$p \to X_p \in T_pM$$

Untuk dua medan vektor X dan Y yang mulus pada M, didefinisikan medan vektor baru dinotasikan sebagai $[X,Y]$ dinamakan Lie bracket dari X dan Y dengan

$$[X,Y]_p(f) = X_p[Y(f)] - Y_p[X(f)], \text{ untuk setiap } f \in C^\infty(p)$$

Aljabar Aksesibilitas dan Distribusi Aksesibilitas

Untuk sistem kontrol nonlinear affine mulus

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{j=1}^{m} g_j(x)u_j, \qquad \mathbf{u} = (u_1,\ldots,u_m) \in \mathbf{U} \subset \mathbf{R}^m \tag{2.1}$$

di mana,

$x = (x_1,\ldots,x_n)$ koordinat lokal untuk manifod mulus M (manifold ruang state), $f, g_1, \ldots g_m$ adalah medan vektor mulus pada M. f adalah medan vektor drift, g_j ,$j \in \underline{m}$ adalah medan verktor input, $u_j, j \in \underline{m}$ fungsi kontrol.

Asumsi 2.1.

a. Ruang input U adalah sedemikian hingga himpunan medan vektor yang bersesuaian dengan sistem (2.1).

$$F = \{f + \sum_{j=1}^{m} g_j u_j, \mid (u_1,\ldots,u_m) \in U\} \tag{2.2}$$

memuat medan vektor $f, g_1, \ldots, g_m$

b. U terdiri dari fungsi konstan dan kontinu bagian demi bagian dari kanan, dimana ruang kontrol $u_1,\ldots,u_m$ didefinisiakan sebagai

$U = \{ u : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid$ **u konstan dan kontinu bagian demi bagian dari kanan** $\}$

Keluarga medan vektor yang mempunyai sifat yaitu bila $X \in F$ mengakibatkan $-X \in F$ dinamakan *simetri*. Penyelesaian tunggal (2.1) pada saat $t \geq 0$ untuk suatu fungsi input (kontrol) yang khusus $u(.)$ dan kondisi awal $x(0) = x_0$ dinotasikan x (t, 0, x_0, u) atau disederhanakan x(t). Maka dapat didefinisikan berikut.

Definisi 2.1 *Sistem nonlinear* (2.1) *dinamakan terkontrol jika untuk dua titik sebarang* x_1, x_2 *dalam M ada waktu hingga T dan fungsi kontrol admissible* $u: [0,T] \to U$ *sehingga* $x(T,0,x_1,u) = x_2$.

Definisi 2.2 *Untuk sistem nonlinear* (2.1) *Aljabar Aksesibilitas adalah subaljabar terkecil dari* $V^{\infty}(M)$ *(Aljabar Lie dari medan vektor yang memuat* $f, g_1, \ldots, g_m$*)*

Ciri-ciri elemen yang berada di $\mathcal{C}$ diberikan oleh proposisi berikut.

Proposisi 2.3 *Setiap elemen dari* $\mathcal{C}$ *adalah kombinasi linear dari pengulangan Lie brackets berbentuk*

$$[X_k, [X_{k-1}, [\ldots, [X_2, X_1] \ldots]]] \tag{2.3}$$

dimana X_1, $i \in \underline{k}$ *adalah dalam himpunan* $\{f, g_1, \ldots, g_m\}$ *dan* $k = 0, 1, 2, \ldots$

Distribusi Aksesibilitas $\mathcal{C}$ didefinisikan sebagai distribusi yang dibangun oleh Aljabar Aksesibilitas $\mathcal{C}$:

$$C(x) = \text{span}\,\{X(x) \mid X \text{ medan vektor dalam } \mathcal{C}\},\ x \in M. \tag{2.4}$$

Karena $\mathcal{C}$ subaljabar maka $\mathcal{C}$ involutive. Jika $R^V(x_0,T)$ adalah himpunan titik yang dapat dicapai dari x_0 dalam waktu T>0, dan trayektorinya untuk $t \le T$ berada dalam lingkungan V dari x_0.

$R^V(x_0,T) = \{x \in M \mid$ ada suatu input admissible $u : [0,T] \to U$ sehingga evolusi (trayektori) dari (2.1) untuk $x(0) = x_0$ memenuhi $x(t) \in V$, $0 \le t \le T$, dan $x(T) = x\ \}$

Dan notasikan

$$R_T^V(x_0) = \bigcup_{\tau \le T} R^V(x_0, \tau) \tag{2.5}$$

Jurnal Penelitian Sains ; hal 15 - 24
No.4. Oktober 1998 ISSN: 1410-7058

Keteraksesan Sistem Kontrol Nonlinear

Teorema yang menunjukkan kondisi cukup dari suatu sistem yang terakses memungkinkan pengujian terhadap keteraksesan sistem dilakukan secara aljabar yang relatif mudah dikerjakan.

Teorema 3.1 *Untuk sistem nonlinear* (2.1). *Jika*

$$\dim C(x_0) = n \qquad \textbf{(3.1)}$$

maka untuk sebarang lingkungan V dari x_0 dan $T > 0$ himpunan $R_T^V(x_0)$ *memuat himpunan buka tak kosong dari M. [Nijmeijer,H & Van der Schaft 1990]*

Bukti. Dengan kekontinuan ada suatu lingkungan $W \subset V$ dari x_0 sehingga dim C(x)=n untuk sebarang $x \in W$. Kemudian dikonstruksi suatu barisan submanifold N_j dalam W, dim N_j = j, j$\in\underline{n}$, dengan cara berikut. Misalkan

$$F = \{ \mathbf{f} + \sum_{j=1}^{m} g_j u_j, \mid (u_1,\ldots,u_m) \in U \}$$

untuk j=1 pilih $X_1 \in F$ sedemikian hingga $X_1(x_0) \neq 0$. Maka dengan teorema Flow Box untuk $\varepsilon_1 > 0$ cukup kecil

$$N_1 = \{ X_1^{t_1}(x_0) \mid 0 < t_1 < \varepsilon_1 \}$$

adalah submanifold dari M berdimensi 1 yang termuat dalam W. Kemudian konstruksi N_j untuk j >1 dengan induksi. Asumsikan bahwa telah dikonstruksi submanifold

$N_{j-1} \subset$ W berdimensi j-1 didefinisikan sebagai

$$N_{j-1} = \{ X_{j-1}^{t_{j-1}} \circ \ldots \circ X_1^{t_1}(x_0) \mid 0 \leq T_i < t_i < \varepsilon_i, i \in \underline{j-1} \}$$

dimana X_i , $i\in \underline{j-1}$, adalah medan vektor dalam F, dan $\sum_{i=1}^{j-1}\sigma_i$ cukup kecil. Jika j-1<n maka dapat diperoleh $X_j \in F$ dan

$$q \in N_{j-1} \ni X_j(\dot{q}) \notin T_q N_{j-1} \tag{3.2}$$

Untuk itu, jika ini tak mungkin maka $X(q) \in T_q N_{j-1}$ untuk sebarang $X \in F$ dan $q \in N_{j-1}$. Berarti ini juga berlaku untuk sebarang $X \in C$. Sehigga dim C(q)<n untuk setiap $q \in N_{j-1} \subset W$, yang kontradiksi dengan definisi W. Juga selanjutnya boleh diambil q dalam (3.2) cukup dekat dengan x_0. Jadi pemetaan

$$(t_j,\ldots,t_1) \to X_j^{t_j} \circ X_{j-1}^{t_{j-1}} \circ \ldots \circ X_1^{t_1}(x_0)$$

punya rank j pada suatu himpunan $0 \leq T_i < t_i < \varepsilon_1$,$i \in \underline{j}$,

sehingga peta dari pemetaan ini untuk ε_i , $i \in \underline{j}$ yang cukup kecil adalah suatu submanifold $N_j \subset W$ berdimensi j. Akhirnya dapat disimpulkan bahwa N_n adalah himpunan buka yang diinginkan termuat dalam $R_T^V(x_0)$.

Definisi 3.2 *Sistem (2.1) dikatakan terakses secara lokal dari x_0 jika $R_T^V(x_0)$ memuat himpunan buka tak kosong dari M untuk semua lingkungan V dari x_0 dan semua $T>0$. Jika ini berlaku untuk sebarang $x_0 \in M$ maka sistem dinamakan terakses secara lokal.*

Akibat dari Teorema 3.1 dan Definisi 3.2 dapat dituliskan,

Akibat 3.3 *Jika dim $C(x) = n$ untuk semua $x \in M$ maka sistem terakses secara lokal.*

Akibat inilah yang dipakai sebagai dasar pengujian keteraksesan sistem dengan menggunakan perhitungan aljabar (rank matriks).

Teori di atas akan diterapkan pada suatu sistem linear yang dapat ditulis sebagai,

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^{m} b_i u_i, \qquad x \in \mathbf{R}^n$$

$b_1,\ldots,b_m$ kolom-kolom dari matrix B. Pertama dihitung aljabar aksesibilitas $\mathcal{C}$ untuk kasus ini. Lie brackets antar medan vektor input konstan yang diberikan oleh vektor-vektor $b_1,\ldots,b_m$ semuanya nol:

$$[b_i, b_j] = 0 \ , \qquad i,j \in \underline{m}$$

Lie brackets dari medan vektor drift Ax dengan suatu medan vektor input b_i menghasilkan medan vektor konstan,

$$[Ax, b_i] = -Ab_i.$$

Lie brackets dari Ab_i dengan Ab_j atau b_j adalah nol, sedangkan

$$[Ax, -Ab_i] = A^2 b_i$$

Teruskan dengan cara ini dapat disimpulkan bahwa $\mathcal{C}$ dibangun oleh semua medan vektor konstan $b_i, Ab_i, A^2 b_i, \ldots i \in \underline{m}$, bersama-sama dengan medan vektor drift linear Ax. Jadi dengan teorema Cayley Hamilton,

$$C = span\{Ax, b_i, Ab_i, \ldots, A^{n-1} b_i, i \in \underline{m}\} dan$$

$$\mathbf{C(x) = Im[B \mid AB \mid \ldots \mid A^{n-1}B] + span\ \{Ax\}}$$

Terlihat bahwa Kondisi rank keteraksesan pada $x_0 = 0$ sama dengan Kondisi rank Kalman untuk keterkontrolan sistem linear. Jadi sifat keteraksesan sistem linear juga mengakibatkan keterkontrolan sistem linear.

Keteraksesan Masalah Kontrol Posisi Benda Kaku (Keteraksesan Sistem Dengan Pendorong Jet Gas)

Dalam bagian ini akan dikaji kondisi perlu dan cukup untuk keteraksesan dari sistem masalah di atas yang model matematikanya dapat ditulis,

$$\mathbf{R = S(\omega)\,R}, \qquad \mathbf{R \in SO(3)} \quad \textbf{(matriks orthogonal)}$$

$$\mathbf{J\omega = S(\omega)\,J\,\omega} + \sum_{j=1}^{m} g_j u_j, \qquad \omega \in \mathbf{R^3} \quad \text{(Crough, P.E. 1984)}$$

Jika ditulis dalam bentuk standard,

$$\mathbf{x = F(x) + \textstyle\sum U_i\,G_i\,(x)}$$

dimana $F(x) = (\, f(\omega), S(\omega)\,R)$; $G_i = (g_I, 0)$ dan $f(\omega) = J^{-1}\,S(\omega)\,J\,\omega$, $g_I = J^{-1}\,b_I$

Karena dalam R^3 supaya bebas linier maka kemungkinan m = 1,2 atau 3. Pengamatan dibagi tiga kasus, yaitu m = 1, 2 dan 3.

Kasus 1. (m = 3)

Dalam vektor baris, $[F,G_i](x) = [2\,J^{-1}\,S(J^{-1}b_i)\,J\omega., S(J^{-1}b_i)\,R]\,b_i$

Karena b_1,b_2,b_3 bebas linear di $T_\omega R^3$, begitu juga dengan $J^{-1}b_i$, i =1,2,3 adalah vektor yang bebas linear di $T_\omega\,R^3$ sehingga $g_I = J^{-1}\,b_i$, i =1,2,3 membangun $T_\omega\,R^3$. Juga vektor $S(J^{-1}b_i)R$, i =1,2,3 matriks yang bebas linear di $T_RSO(3)$ dan karena $T_RSO(3)$ berdimensi 3 maka $S(J^{-1}b_i)R$, i = 1,2,3 membangun ruang $T_RSO(3)$. Jadi G_1,G_2,G_3, $[F,G_1],[F,G_2],[F,G_3]$ membangun ruang singgung $T_{(R,\omega)}SO(3) \times R^3$ dimana-mana. Jadi sistem selalu terakses. sehingga didapatkan hasil dari kasus 1 yaitu

$$\text{Sistem} \quad \bar{R} = S(\omega)\,R, \qquad J\omega = S(\omega)\,J\,\omega + b_1\,u_1 + b_2\,u_2 + b_3\,u_3;$$

$|\,u_i\,| \le \beta_i$, i=1,2,3 selalu terakses untuk $\beta_i > 0$ cukup kecil dan b_1, b_2, b_3 bebas linear.

Dari kasus 2 (m=2) dan kasus 3(m=3), dengan cara serupa didapatkan hasil yaitu

Sistem $R = S(\omega) R$, $J\omega = S(\omega) J \omega + b_1 u_1 + b_2 u_2$;

$|u_i| \le \beta_i$, i= 1,2 untuk $\beta_i > 0$ cukup kecil dan b_1, b_2 bebas linear terakses jika dan hanya jika $R^3 = \text{span}\{ b_1, b_2, S(\omega) J^{-1} \omega, \omega \in P = \text{span}\{b_1, b_2\}\}$ dan

Sistem $R = S(\omega) R$, $J\omega = S(\omega) J \omega + b_1 u_1$;

$|u_i| \le \beta_i$ dan $b_1 \# 0$, untuk $\beta_i > 0$ cukup kecil terakses, jika dan hanya jika $R^3 = \text{span}\{ b_1, S(b_1) J^{-1} b_1, S(\omega) J^{-1}(\omega), \omega \in P = \text{span}\{b_1, S(b_1) J^{-1} b_1\}\}$

KESIMPULAN

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa, pengujian keteraksesan sistem kontrol nonlinear dapat dikerjakan dengan perhitungan secara aljabar (rank matriks) yang relatif mudah. Perhitungan rank matriks tersebut juga dapat menentukan kondisi perlu dan cukup dari suatu sistem yang terakses. Dengan analisis lebih lanjut (kestabilan sistem) dapat dilakukan pengujian dari sistem yang terkontrol.

DAFTAR PUSTAKA

Boothby, W.M., *An Introduction to Differential Manifolds and Riemannian Geometry,* Academic Press, New York, 1975.

Brockett, R.W., *Nonlinear systems and differential geometry,* Procc. IEEE, 64, (Jan.1976), 61-72.

Crough, P.E, *Spacecraft attitude control and stabilization: applications of geometric control theory to rigid body models,* IEEE Trans.Aut.Control, AC-29(1984),321-331

Isidori, Alberto, *Nonlinear Control Systems,* Third-Edition, Springer-Verlag London Limited, Great Britain, 1995.

Krener, A.J.,and Hermann, R., *Nonlinear observability and controllability,* IEEE Trans. Automat.Control, AC-22(1977), 728-740.

Nijmeijer, H., and Van der Schaft, A.J., *Nonlinear Dynamical Control Systems,* Springer-Verlag Newyork Inc.,New York, 1990.