Jurnal Penelitian Sains ; hal 21 - 25
No.6. Oktober 1999 ISSN: 1410-7058

PARTISI BILANGAN BULAT POSITIF N KEDALAM R BUAH BILANGAN BULAT POSITIF

Herlina Hanum
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya

ABSTRAK

Dalam teori peluang diperlukan penghitungan banyaknya anggota ruang contoh. Salah satu ruang contoh yang akan dihitung jumlah anggotanya adalah masalah yang dikenal dengan pembagian n benda ke dalam r tempat. Ruang contoh dihitung dengan rumus $\binom{n+r-1}{n}$ *dengan* $n \geq r$ *dan diperbolehkan adanya tempat yang kosong. Dalam penelitian ini tidak dibolehkan ada tempat yang kosong. Metode yang digunakan adalah metode simulasi terhadap nilai n dan r. Berdasarkan simulasi tersebut didapat rumus*

$\binom{n-1}{r-1}$ *dengan* $r \leq n$.

PENDAHULUAN

Ilmu peluang sebagai dasar dari Statistika sangat penting artinya. Berdasarkan jenis peubah yang digunakan, bentuk sebaran peluang dibagi menjadi sebaran peluang kontinyu dan sebaran peluang diskrit. Dalam sebaran peluang diskrit, penentuan banyaknya anggota ruang contoh merupakan masalah utama. Banyaknya anggota ruang contoh ini adalah seluruh kejadian tunggal yang dapat terjadi dalam suatu percobaan.dan akan menjadi penentu besarnya peluang kejadian-kejadian yang menjadi anggota ruang contoh. Penentuan anggota ruang contoh dikenal antara lain dengan permutasi, kombinasi dan gabungan antara keduanya.

Salah satu bentuk masalah peluang diskrit adalah masalah sebaran bola-bola kedalam kotak-kotak. Istilah ini dipakai untuk menunjukkan banyaknya kemungkinan pembagian n buah benda atau objek kedalam r buah tempat. Bila diterapkan pada analisis bilangan bulat, dipakai istilah partisi suatu bilangan bulat bernilai n kedalam beberapa bilangan bulat yang lebih kecil. Masalah ini dapat ditulis dalam persamaan: $x_1 + x_2 + \ldots x_r = n$ dengan $x_i \geq 0$ atau x_i merupakan bilangan bulat nonnegatif. Dengan batasan tersebut ada kemungkinan x_i bernilai nol atau ada tempat yang tidak terisi. Pada masalah tertentu tidak dimungkinkan adanya nilai nol pada x_i atau semua tempat harus terisi. Dalam bentuk seperti ini maka x_i harus berbentuk bilangan bulat positif.

Penghitungan banyaknya kemungkinan partisi bilangan bulat positif n kedalam r buah bilangan bulat nonnegatif mengunakan rumus.

rumus $\binom{n+r-1}{n}$ dengan n $\geq$ r (Ross.S, 1976).

Masalah yang dianalisa dalam penelitian ini adalah bagaimana rumus untuk menghitung banyaknya kemungkinan partisi bilangan bulat positif n ke dalam r buah bilangan bulat positif.

METODE PENELITIAN

Langkah kerja yang dilakukan dalam penelitian ini adalah

1. Membuat simulasi pasangan bilangan n dan r
2. Menghitung kombinasi untuk setiap pasangan bilangan n dan r
3. Membuat fungsi dari kombinasi setiap pasangan bilangan n dan r
4. Membuat rumus umum untuk semua pasangan n dan r

HASIL DAN PEMBAHASAN

Partisi bilangan bulat n ke dalam r buah bilangan bulat positif dalam persamaan berbentuk $x_1+x_2+x_3+....+x_r = n$ mempunyai syarat bahwa $r \leq n$. Syarat ini harus dipenuhi agar setiap x_i bernilai positif. Tanda sama dengan (=) digunakan bila x_i=1 untuk semua i. Pasangan r dan n yang dibuat adalah menentukan nilai-nilai r pada setiap nilai n. Nilai r dimulai dari 1 sampai n. Misalkan bilangan 4 akan dibagi ke dalam 1,2,3 atau 4 buah bilangan bulat positif, maka didapat pasangan n dan r sebanyak buah yaitu {4,1},{4,2},{4,3} dan {4,4}. Nilai-nilai n yang akan dipartisi dimulai dari 2 sampai 10 karena diharapkan untuk nilai n sampai 10 sudah didapatkan pola untuk menentukan rumus partisi bilngan n ke dalam r bilangan bulat.

Selanjutnya dilakukan partisi untuk setiap n pada nilai-nilai $r \leq n$. Banyaknya cara partisi nilai n kedalam r bilangan bulat positif dilambangkan $\left\{ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\}$. Sebagai contoh partisi bilangan 4 ke dalam 1 bilngan bulat $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right\}$.

Partisi suatu bilangan menjadi 1 buah bilangan hanya memiliki 1 kemungkinan yaitu bilangan itu sendiri. Misalkan bilangan 4 dipartisi menjadi bilangan 4 itu sendiri. Demikian juga partisi suatu bilangan sebanyak nilai bilangan itu sendiri hanya memiliki satu kemungkinan yaitu menjadi n buah bilangan bulat bernilai 1 (satu). Untuk r lain dimana $1 < r < n$ banyaknya partisi diuraikan dibawah ini:

- n = 3 r = 2 partisinya 3 = 1+2 atau 3 =2+1 dicatat sebagai (1,2), (2,1) jadi $\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$ ada 2 kemungkinan
- n =4 r =2 partisinya adalah (1,3), (2,2), dan (3,1) jadi ada 3 kemungkinan

  r =3 partisinya adalah (1,1,2), (1,2,1), dan (2,1,1) jadi ada 3 kemungkinan

Hasil lengkap dari penghitungan banyaknya kemungkinan partisi untuk semua nilai n =2,3,4,...,10 dengan semua r yang mungkin disajikan dalam tabel berikut ini

Tabel.1. Banyaknya kemungkinan partisi bilangan bulat n ke dalam r buah bilangan bulat positif

N	r 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	1	1								
3	1	2	1							
4	1	3	3	1						
5	1	4	6	4	1					
6	1	5	10	10	5	1				
7	1	6	15	20	15	6	1			
8	1	7	21	35	35	21	7	1		
9	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
10	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Sebagai pendekatan terhadap pola nilai –nilai kemungkinan kombinasi n dan r, digunakan kombinasi s dan t dengan rumus umum penghitungan kombinasi $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \frac{s!}{t!(n-t)!}$.

Untuk perbandingan nilai kombinasi n dan r terhadap kombinasi s dan t digunakan nilai n dan s = 4,5,6,7 yang memiliki kombinasi yang cukup banyak terhadap r dan t. Dibawah ini disajikan hasil perhitungan terhadap kombinasi t dan s dan nilai kombinasi n dan r.

Tabel 2. Nilai $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ dan nilai $\begin{Bmatrix} n \\ r \end{Bmatrix}$

		s 4	5	6	7
	1	4	5	6	7
	2	6	10	15	21
	3	4	10	20	35
t	4	1	5	10	35
	5		1	6	21
	6			1	7
	7				1

		n 4	5	6	7
	1	1	1	1	1
	2	3	4	5	6
	3	3	6	10	15
r	4	1	4	10	20
	5		1	5	15
	6			1	6
	7				1

Dari 4 bentuk kombinasi antara s dant serta n dan r tampak ada kesamaan nilai-nilai antara $\binom{s}{t}$ dengan kombinasi n dan r yang berbeda.

Kesamaan tersebut terlihat pada $\binom{4}{t}$ dengan $\binom{5}{r}$, $\binom{5}{t}$ dengan $\binom{6}{r}$ dan $\binom{6}{t}$ dengan $\binom{7}{r}$.

Berdasarkan ketiga kesamaan tersebut dan dapat ditunjukkan untuk pasangan s dan n yang lain, dibuat persamaan s = n – 1.

Selanjutnya dilakukan analisa terhadap nilai kombinasi t dan r untuk s = n– 1. Perbandingan kombinasi t dan r untuk setiap nilai s = n-1 dibuat dalam Tabel 3 berikut.

Tabel. 3. Perbandingan nilai t dan n untuk s dan n yang sepadan

		s 4	n 5	s 5	n 6	s 6	n 7
t, r	1	4	1	5	1	6	1
	2	6	4	10	5	15	6
	3	4	6	10	10	20	15
	4	1	4	5	10	15	20
	5		1	1	5	6	15
	6				1	1	6
	7						1

Analisa terhadap nilai kombinasi untuk t dan r menunjukkan suatu hubungan antara t dan r. Nilai-nilai kombinasi $\binom{s}{t} = \binom{n-1}{t}$ sama dengan nilai $\left\{\begin{matrix} n-1 \\ r-1 \end{matrix}\right\}$. Berdasarkan kesamaan tersebut dan dapat ditunjukkan kesamaan untuk pasangan s dan n lain, diperoleh hubungan antara t dan r yaitu t = r-1

Berdasarkan hubungan s dengan r dan t dengan r yang diperoleh tersebut dibuat rumus untuk menghitung banyaknya kombinasi pasangan n dan r menggunakan rumus umum penghitungan banyaknya kombinasi yaitu

$$\left\{\begin{matrix} n \\ r \end{matrix}\right\} = \binom{n-1}{r-1} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$$

Selanjutnya akan dibuktikan apakah rumus ini berlaku untuk sembarang pasangan n dan r. Dalam pembuktian ini dicoba untuk n=8 dengan r = 5, n=9 dengan r = 4, dan n = 10 dengan r = 4. Perhitungan kombinasi untuk contoh-contoh tersebut disajikan berikut ini :

$$\left\{\begin{matrix} 8 \\ 5 \end{matrix}\right\} = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = 35$$

$$\left\{\begin{matrix} 9 \\ 4 \end{matrix}\right\} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = 56$$

$$\left\{\begin{matrix} 10 \\ 4 \end{matrix}\right\} = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!6!} = 84$$

Langkah selanjutnya adalah membandingkan nilai- nilai tersebut dengan hasil perhitungan kombinasi n dan r pada tabel 1. Dari perbandingan tersebut, ternyata hasil yang diperoleh dari rumus yang didapat sama dengan hasil yang didapat dari perhitungan manual seperti yang disajikan dalam tabel 1. Jadi rumus yang diperoleh dapat digunakan untuk menghitung banyaknya kombinasi n dan r atau banyaknya kemungkinan partisi bilangan bulat n ke dalam r buah bilangan bulat positif.

KESIMPULAN

Berdasarkan analisa terhadap hasil perhitungan terhadap banyaknya kemungkinan partisi bilangan bulat positif n kedalam r buah bilangan bulat positif didapat rumus untuk menghitung banyaknya kemungkinan tersebut yaitu

$$\binom{n-1}{r-1} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} \quad r \leq n$$

SARAN

Rumus ini didapat dari proses induksi , disarankan untuk dianalisis kembali dengan metode deduksi.

DAFTAR PUSTAKA

Ross, S.M. , 1976, A First Course in Probability, MacMilan Publishing inc. co

Walpole, R.E. 1994, Metode Statistika, edisi ke-3 , PT. Gramedia, Jakarta