Jurnal Penelitian Sains ; hal 29 - 36
No. 18 Oktober 2005 ISSN: 1410-7058

KAJIAN ALGORITMA QR DENGAN SHIFT DAN ALGORITMA QR GANDA DALAM MENGHITUNG NILAI EIGEN SUATU MATRIKS

Yulia Resti
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji kualitas, kompleksitas waktu dan keuniversalan algoritma QR dengan shift dan algoritma QR Ganda dalam menghitung nilai eigen suatu matriks. Algoritma QR dengan shift memiliki laju kekonvergenan dengan rasio $|(\lambda_n - k)/(\lambda_{n-1} - k)|$ *dengan memilih k sangat mendekati* λ_n *yaitu* $k_m = a_{nn}^{(m)}$ *, kompleksitas* $O(n^2)$ *dan memiliki keuniversalan kekonvergenan jika tak satupun nilai eigen matriks A modulusnya sama. Algoritma QR ganda rasio laju kekonvergenannya* $|(\lambda_n - k_1)(\lambda_n - k_2)/(\lambda_{n-1} - k_1)(\lambda_{n-1} - k_2)|$, *kompleksitas waktu* $O(n^2)$ *dan tidak memiliki keuniversalan kekonvergenan karena algoritma QR ganda dikembangkan khusus untuk matriks A yang memiliki beberapa nilai eigen kompleks yang modulusnya sama.*

Key word: algoritma QR dengan shift, algoritma QR Ganda, nilai eigen

ABSTRACT

The aim of this research is evaluate force of convergenity, time complexity and universality of QR Algorithm with Shift and Double QR Algorithm in finding eigen value of a matrix. QR Algorithm with Shift has force of convergenity ratio $|(\lambda_n - k)/(\lambda_{n-1} - k)|$ *by choosing k nearly* λ_n *yaitu* $k_m = a_{nn}^{(m)}$ *, time complexity* $O(n^2)$ *and universality of convergence if all of eigen value of matrix A has different modulus. Both force of convergenity ratio and time complexity of double QR Algorithm are* $|(\lambda_n - k_1)(\lambda_n - k_2)/(\lambda_{n-1} - k_1)(\lambda_{n-1} - k_2)|$ *and* $O(n^2)$*. It has not universality of convergence.*

Key word: QR Algorithm with Shift, Double QR Algorithm, Eigen Value

PENDAHULUAN

Suatu algoritma tidak selalu memberikan hasil terbaik yang mungkin diperoleh, karenanya kualitas hasil suatu algoritma perlu dikaji lebih lanjut (C.L.Liu, 1995).

Algoritma QR merupakan salah satu algoritma yang menghitung nilai eigen suatu matriks yang berupa barisan iterasi transformasi similaritas. Menurut J.G.F.Francis,1961, (C.G. Cullen, *An Introduction to Numerical Linear Algebra*, 1994 : hal. 145), algoritma QR sangat efektif untuk menghitung semua nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks sebarang, namun menurut D. S Watkins (1991), laju kekonvergenan algoritma QR relatif lambat dan kompleksitas waktunya sangat besar.

Menurut S. Nakamura (1991) ada dua modifikasi algoritma QR yaitu algoritma QR dengan shift dan algoritma QR ganda. Kedua modifikasi itu belum dikaji secara kualitatif, untuk itu perlu dilakukan pengkajian, yang meliputi laju kekonvegenan, kompleksitas waktu dan keuniversalan kekonvergenannya.

TINJAUAN PUSTAKA

Dalam algoritma QR, setiap iterasinya terdiri dari dekomposisi matriks A ke bentuk QR dan transformasi similaritas, dengan A matriks yang akan dihitung nilai eigennya, Q matriks ortogonal dan R matriks segitiga atas. Bentuk sederhana algoritma QR berupa barisan matriks yang similar secara ortogonal terhadap matriks A yang konvergen terhadap matriks R.

Algoritma QR dengan Shift

Masukan : Matriks A yang akan dicari nilai eigennya: A(n,n), TOL, Maks Transformasi A ke matriks Hessenberg A_1

Untuk j = 0, 1, 2, … , n-2

m = n – j

Untuk i = 1, 2, … , Maks

Pilih sebuah shift $k_i(= a^i_{mm})$

Dekomposisikan : $A_i - k_iI = Q_iR_i$

Hitung $A_{i+1} = k_iI + R_iQ_i$

Jika $\left|a^{(i+1)}_{m,m-1}\right| < TOL$, ambil

$\lambda_m = a^{(i+1)}_{mm}$

Hapus baris terakhir dan kolom terakhir dari A_i(sama dengan menentukan $a^{(i+1)}_{m,m-1} = 0$)

Keluaran : matriks Hessenberg atas yang similar terhadap A dengan entri subdiagonal lebih banyak nol

Algoritma QR Ganda

Masukan:Matriks A yang akan dicari nilai eigennya : A (n,n),TOL,Maks

Transformasi A ke matriks Hessenberg A_1

$$A_{2s} = \begin{bmatrix} a^{2s}_{m-1,m-1} & a^{2s}_{m-1,m} \\ a^{2s}_{m,m-1} & a^{2s}_{mm} \end{bmatrix}$$

tr $(A_{2s}) = a_{m-1,m-1} + a_{mm}$

det $(a_{2s}) = a_{m-1,m-1}a_{mm} - a_{m,m-1}a_{m-1,m}$

Untuk j = 0, 1, 2, … , n-2

$m = n - j$

Untuk $i = 1, 2, \dots, Max$

$k_1+k_2=tr(A_{2s})$

$k_1k_2=det(A_{2s})$

$(A_i-k_1I)(A_i-k_2I)= A^2 - (k_1+k_2)A + k_1k_2I$

Dekomposisikan: $(A_i-k_1I)(A_i-k_2I)=Q_{i+1}R_{i+1}$

Hitung $A_{i+1} = k_iI + R_{i+1}Q_{i+1}$

Jika $\left|a^{(i+1)}_{m,m-1}\right| < TOL$,ambil

$$\lambda_m = a^{(i+1)}_{mm}$$

Hapus baris terakhir dan kolom terakhir dari A_i (sama dengan menentukan $a^{(i+1)}_{m,m-1} = 0$)

Keluaran : sebuah matriks Hessenberg atas yang similar terhadap A dengan memasukan subdiagonal lebih banyak nol.

Transformasi Similaritas

Dua matriks bujursangkar A, B dikatakan *similar* jika ada matriks P bujursangkar yang tak singular sedemikian sehingga

$$B = P^{-1}AP \quad \dots\dots\dots\dots [1]$$

Persamaan [1] disebut *transformasi similaritas* dan P disebut *matriks transformasi.*

Matriks Ortogonal

Sebuah matriks A, n x n dikatakan matriks ortogonal jika mempunyai sifat $A^{-1} = A^t$

Matriks Segitiga Atas

Sebuah matriks A, n x n berbentuk segitiga atas jika setiap elemen yang terletak di bawah diagonal utama adalah nol.

Matriks Hessenberg Atas

Sebuah matriks A, n x n berbentuk Hessenberg atas jika setiap elemen yang terletak di bawah subdiagonal pertama adalah nol, yaitu $a_{ij} = 0$ untuk $i > j + 1$.

Dekomposisi QR

Komposisi suatu matriks yang berbentuk QR disebut *dekomposisi QR* apabila Q adalah matriks ortogonal dan R adalah matriks segitiga atas. Dekomposisi QR dapat dilakukan dengan beberapa cara diantaranya dengan rotasi. Jika A adalah matriks yang akan didekomposisi ke bentuk QR, maka rotasinya sebagai berikut :

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} c & -s & \\ s & c & 0 \\ & 0 & I \end{bmatrix} \qquad \textit{dan}$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q}^T_{n,n-1}\boldsymbol{Q}^T_{n,n-2}\dots\boldsymbol{Q}^T_{21}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}$$

dengan :

$$c = \frac{a_{11}}{\sqrt{a^2_{11} + a^2_{21}}} \quad \text{dan} \quad s = \frac{a_{21}}{\sqrt{a^2_{11} + a^2_{21}}}$$

METODOLOGI

Metodologi Penelitian

1) Mengkaji rumusan kualitas suatu algoritma yang meliputi laju kekonvergenan dan kompleksitas waktu serta keuniversalan kekonvergenan algoritma.
2) Menerapkan rumusan-rumusan tersebut pada algoritma QR dengan shift dan algoritma QR Ganda.
3) Menguji hasil kajian yang diperoleh dengan menggunakan data yang telah dianalisis.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Algoritma QR dengan Shift

Laju Kekonvergenan

Jika iterasi A_m dalam bentuk Hessenberg atas dan misalkan $a_{ij}^{((m)}$ = entri (i,j) dari A_m, maka:

$$A_m = \begin{bmatrix} a_{11}^{(m)} & a_{12}^{(m)} & \cdots & a_{1,n-1}^{(m)} & a_{1n}^{(m)} \\ a_{21}^{(m)} & a_{22}^{(m)} & \cdots & a_{2,n-1}^{(m)} & a_{2n}^{(m)} \\ & a_{32}^{(m)} & \cdots & a_{3,n-1}^{(m)} & a_{3n}^{(m)} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{n,n-1}^{(m)} & a_{nn}^{(m)} \end{bmatrix}$$

Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ adalah nilai eigen A, sedemikian sehingga $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots.. \geq |\lambda_n|$. Entri-entri subdiagonal $a_{i+1,1}$ konvergen ke nol bila m mendekati ∞. Dengan kata lain jika $|\lambda_i| > |\lambda_{i=1}|$, maka $a_{i+1,1}^{(m)} \rightarrow 0$ secara linier dengan rasio kekonvergenan $|\lambda_{i+1}/\lambda_i|$, i=1,…,n-1. Dengan cara yang sama dilakukan untuk A – kI. A – kI memiliki nilai eigen $\lambda_1 - k, \lambda_2 - k, \ldots.., \lambda_n - k$ sehingga jika $|\lambda_1 - k| \geq |\lambda_2 - k| \geq \ldots.. \geq |\lambda_n - k|$ maka rasio kekonvergenan adalah $|(\lambda_n - k)/(\lambda_{n-1} - k)|$ dengan memilih k sangat mendekati λ_n yaitu $k_m = a_{nn}^{(m)}$.

Kompleksitas waktu

Untuk mengkaji kompleksitas waktu suatu algoritma perlu ditunjukkan terlebih dahulu bahwa algoritma ini benar. Artinya algoritma ini akan menghasilkan keluaran yang sesuai dengan yang diharapkan.

Bukti : (dengan induksi matematika)

1. basis induksi: untuk j=0, i=1, n=2 akan didapat $k_1 = a^1_{22}$, $\lambda_2 = a^2_{22}$, dan $A_2 = k_1 I + R_1 Q_1$.
2. langkah induksi: misalkan j=s, i=p n=q akan didapat $k_p = a^p_{q-s,q-s}$, $\lambda_{q-s} = a^{p+1}_{q-s,q-s}$ dan $A_{p+1} = k_p I + R_p Q_p$.

maka dapat disimpulkan bahwa algoritma tersebut benar. Jumlah operasi iterasi untuk mengkaji kompleksitas waktunya sebagai berikut :

Transformasi A ke matriks Hessenberg A_1 : (n-1)(n-1) operasi *)

j : n-2 operasi

i : n operasi

sehingga kompleksitas waktu : $n^2 - 1$. Dengan notasi big O maka kompleksitas waktunya $O(n^2)$. Karena A adalah matriks yang akan didekomposisi ke bentuk QR, maka rotasinya yaitu :

$$Q = \begin{bmatrix} c & -s & \\ s & c & 0 \\ & 0 & I \end{bmatrix} \quad dan$$

$$R = Q^T_{n,n-1} Q^T_{n,n-2} \ldots Q^T_{21} A = Q^T A$$

dengan :

$$c = \frac{a_{11}}{\sqrt{a^2{}_{11} + a^2{}_{21}}} \text{ dan } s = \frac{a_{21}}{\sqrt{a^2{}_{11} + a^2{}_{21}}}$$

dan jika dibentuk dalam matriks adalah:

$$^{*)} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 + sx_2 \\ -sx_1 + cx_2 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \end{bmatrix} \text{ ke } \begin{bmatrix} ca_{1j} + sa_{2j} \\ -sa_{1j} + ca_{2j} \end{bmatrix} \; j = 1, 2, \ldots, n$$

transformasi A ke A_{i+1} menggunakan (n-1) rotasi di sisi kiri diikuti (n-1) rotasi di sisi kanan. Jadi operasinya : (n-1)(n-1).

Keuniversalan Kekonvergenan

Jika A memiliki beberapa nilai eigen dari modulus yang sama, maka barisan $\{A_i\}$ akan hanya konvergen ke matriks segitiga blok. Ilustrasi: jika $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3|$, maka barisannya akan konvergen ke matriks blok diagonal 3x3

$$A_i \rightarrow \begin{bmatrix} y & y & y & x & \cdots & x \\ y & y & y & x & \cdots & x \\ y & y & y & x & \cdots & x \\ & & & \lambda_4 & \cdots & x \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Di mana matriks 3x3 yang entri-entrinya dinyatakan dengan y memiliki nilai eigen λ_1, λ_2 dan λ_3. Jika $\lambda_3 = \overline{\lambda_4}$, maka

$$A_i \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & x & x & x & x & \cdots & x \\ 0 & \lambda_2 & x & x & x & \cdots & x \\ 0 & 0 & y & y & x & \cdots & x \\ 0 & 0 & y & y & x & \cdots & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & \cdots & x \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

dimana blok 2x2 yang entri-entrinya dinyatakan dengan y akan memiliki nilai eigen λ_3 dan λ_4. Jadi pada algoritma QR dengan shift, A akan konvergen secara universal ke matriks segitiga atas R jika tak satupun nilai eigen dari A modulusnya sama.

Contoh:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

dengan memilih $k_1 = a^1_{44} = 2$, maka:

$$A_2 = R_1 Q_1 + k_1 I$$

$$= \begin{bmatrix} 0.4118 & -5.5820 & -2.2327 & 1.3213 \\ -8.8322 & 1.7756 & 4.0535 & 2.8354 \\ 0 & 6.1553 & 1.7093 & 5.1112 \\ 0 & 0 & 2.8201 & 2.1033 \end{bmatrix}$$

dengan memilih $k_2 = a^2_{44} = 2.1033$, maka:

$$A_3 = R_2 Q_2 + k_2 I$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9356 & 8.3393 & -4.9724 & 1.0632 \\ 8.0555 & 4.3669 & -2.5431 & -2.1518 \\ 0 & -2.8175 & -1.4940 & 0.1419 \\ 0 & 0 & 2.2297 & 4.0627 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

dengan memilih $k_{10} = a^{10}_{44} = -5.3291$, maka:

$$A_{11} = R_{10} Q_{10} + k_{10} I = \begin{bmatrix} 11.2640 & 0.5376 \\ -0.6913 x 10^{-9} & -5.3291 \end{bmatrix}$$

sehingga: $\lambda_1 = 11.2640$ dan $\lambda_2 = -5.3291$ merupakan aproksimasi terbaik dari dua nilai eigen matriks A.

Algoritma QR Ganda

Laju Kekonvergenan

Di sini proses dekomposisi berupa $(A - k_1 1)(A - k_2 1)$ dimana dekomposisi tersebut memiliki nilai eigen $(\lambda_1 - k_1)(\lambda_1 - k_2), (\lambda_2 - k_1)(\lambda_2 - k_2), \ldots, (\lambda_n - k_1)(\lambda_n - k_2)$ sehingga jika

$$|(\lambda_1 - k_1)(\lambda_1 - k_2)| \geq |(\lambda_2 - k_1)(\lambda_2 - k_2)|$$
$$\geq \ldots \geq |(\lambda_n - k_1)(\lambda_n - k_2)|$$

maka rasio kekonvergenan adalah

$$|(\lambda_n - k_1)(\lambda_n - k_2)/(\lambda_{n-1} - k_1)(\lambda_{n-1} - k_2)|$$

.

Kompleksitas Waktu

Bukti : (dengan induksi matematika)

1. basis induksi: untuk j=0, i=1, n=2 akan didapat $\lambda_2 = a^2_{22}$, dan $A_2 = k_1 I + R_2 Q_2$.
2. langkah induksi: misalkan j=s, i=p n=q akan didapat $\lambda_{q-s} = a^{p+1}_{q-s,q-s}$ dan $A_{p+1} = k_1 I + R_{p+1} Q_{p+1}$.

maka disimpulkan bahwa algoritma tersebut benar. Jumlah operasi iterasi untuk mengkaji kompleksitas waktunya sebagai berikut : Transformasi A ke matriks Hessenberg A_1 : (n-1)(n-1) operasi, j: n-2 operasi dan i : n^2 operasi, sehingga kompleksitas waktu : $2n^2 - 1$. Dengan notasi big O, kompleksitas waktunya $O(n^2)$.

Keuniversalan Kekonvergenan

Jurnal Penelitian Sains ; hal 29 - 36
No. 18 Oktober 2005 ISSN: 1410-7058

Algoritma QR ganda dikembangkan untuk kasus khusus yaitu jika matriks A memiliki beberapa nilai eigen kompleks yang modulusnya sama. Dengan kata lain algoritma QR ganda tidak dapat konvergen secara universal.

Contoh:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -625\\ 1 & 0 & 0 & 350\\ 0 & 1 & 0 & -98\\ 0 & 0 & 1 & 14\end{bmatrix}$$ punya nilai eigen komplek dari nilai absolut $5(3\pm 4i, 4\pm 3i)$

maka:

$$k_1+k_2=tr\begin{bmatrix}0 & -98\\ 1 & 14\end{bmatrix}=14$$ dan

$$k_1k_2=\det\begin{bmatrix}0 & -98\\ 1 & 14\end{bmatrix}=98$$

sehingga:

$$(A-k_1I)(A-k_2I)=A^2-(k_1+k_2)A+k_1k_2I$$

$$=\begin{bmatrix}98 & 0 & -625 & 0\\ -14 & 98 & 350 & -625\\ 1 & -14 & 0 & 350\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Dengan bantuan MATALG diperoleh dekomposisi QR:

$$x\begin{bmatrix}99 & -14 & -0.668182 & 91.9192\\ 0 & 98.0051 & 254.532 & -661.834\\ 0 & 0 & 43.2599 & 257.210\\ 0 & 0 & 0 & 22.2361\end{bmatrix}$$

dan matriks tersebut:

$$A_2=Q^TAQ$$

$$=\begin{bmatrix}-0.141414 & -0.683803 & 40.1741 & -667.930\\ 0.989950 & 2.738550 & -16.1215 & 268035\\ 0 & 0.441404 & 3.34856 & -54.3115\\ 0 & 0 & 0.514012 & 8.05431\end{bmatrix}$$

Matriks ini masih berbentuk Hessenberg atas dan entri subdiagonal terkecil pada posisi (3,2). Dengan mengulangi perhitungan sebelumnya menghasilkan:

$$k_1+k_2=11.4029 \qquad k_1k_2=54.8871$$

$$A_2^2-(k_1+k_2)A_2+k_1k_2I$$

$$=\begin{bmatrix}49.7503 & 77.9469 & -562.340 & -1683.6\\ -8.71724 & 17.240 & 263.242 & 50.8635\\ 0.436968 & -2.34640 & -7.11611 & 118.312\\ 0 & 0.226887 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=QR$$

dan

$$A_4=Q^TA_2Q=\begin{bmatrix}1.30446 & -1.64681 & 10.1833 & -69.8841\\ 0.600013 & 3.62334 & -22.0837 & 15.1422\\ 0 & 0.201096 & 5.00136 & -33.6549\\ 0 & 0 & 0.412594 & 4.07084\end{bmatrix}$$

Entri pada posisi (3,2) didapat lebih kecil ketika dua pasang nilai eigen kompleks mulai tidak berdekatan. Pengulangan perhitungan menghasilkan:

$$a_{32}^{(6)} = 0.336322x10^{-1}$$

$$a_{32}^{8} = 0.917264x10^{-2}$$

$$a_{32}^{10} = 0.272661x10^{-3}$$

dan

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 5.20596 & -28.4322 & 23.6299 & -72.1548 \\ 0.733892 & 0.794174 & -0.546916 & 16.5963 \\ 0 & 0.107533x10^{-4} & 1.06244 & -24.0040 \\ 0 & 0 & 0.734402 & 6.9343 \end{bmatrix}$$

Algoritma ini terisolasi nilai eigen kompleks 2x2 dalam blok yang memuat pasangan nilai eigen sekawan.

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Algoritma QR dengan shift memiliki laju kekonvergenan dengan rasio $|(\lambda_n - k)/(\lambda_{n-1} - k)|$ dengan memilih k sangat mendekati λ_n yaitu $k_m = a_{nn}^{(m)}$, kompleksitas waktu $O(n^2)$ dan memiliki keuniversalan kekonvergenan jika tak satupun nilai eigen matriks A modulusnya sama. Algoritma QR ganda memiliki laju kekonvergenan dengan rasio $\left| (\lambda_n - k_1)(\lambda_n - k_2)/(\lambda_{n-1} - k_1)(\lambda_{n-1} - k_2) \right|$, kompleksitas waktu $O(n^2)$ dan tidak memiliki keuniversalan kekonvergenan karena algoritma QR ganda dikembangkan khusus untuk matriks A yang memiliki beberapa nilai eigen kompleks yang modulusnya sama.

Saran

Untuk penelitian lebih lanjut diharapkan dapat mengkhususkan penelitian algoritma QR dalam menghitung nilai eigen untuk matriks Hermit maupun matriks Tak Hermit.

Daftar Pustaka

Cullen, Charles G., 1994. ***An Introduction to Numerical Linear Algebra.*** PWS Publishing Company, Boston.

Liu, C.L., 1995. ***Dasar-dasar Matematika Diskret.*** Edisi Kedua, P.T. Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.

Nakamura, Shoichiro., 1991. ***Applied Numerical Methods with Software.*** Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Watkins, David S., 1991. ***Fundamentals of Matrix Computations.*** John Wiley & Sons.