APLIKASI METODE CUTTING PLANE KELLEY DAN GOMORY DALAM MENENTUKAN SOLUSI OPTIMAL INTEGER PROGRAM NONLINIER

Fitri Maya Puspita, Des Alwine Zayanti
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya

ABSTRAK

Metode Cutting Plane dapat digunakan sebagai metode pencarian solusi masalah program nonlinier yang berkendala. Pada masalah praktis solusi yang dikehendaki seringkali berbentuk integer. Untuk itu dikaji suatu pendekatan dengan mengaplikasikan metode cutting plane Kelley dan Gomory. Program nonlinier yang diselesaikan dengan cutting plane Kelley ditransformasikan menjadi program linier dan selanjutnya program linier tersebut diselesaikan dengan cutting plane Gomory sehingga dihasilkan solusi yang bernilai integer

PENDAHULUAN

Pengoptimalan suatu proses misalnya proses perencanaan produksi, telah dikembangkan untuk mengefisienkan kerja manusia yang makin kompleks. Pengoptimalan matematika suatu proses dapat dianggap sebagai suatu usaha mengoptimalkan suatu fungsi, sehingga dengan memodelkan kondisi yang tersedia sebagai sebuah fungsi, akan diperoleh solusi optimal dengan menggunakan teknik-teknik solusi yang sesuai. Pemodelan suatu masalah ke bentuk fungsi dapat ditinjau berdasarkan kelinieran fungsi tersebut. Akan tetapi, dalam masalah praktis tidak selalu sebuah fenomena dapat dinyatakan sebagai model linier, bahkan hampir sebagian besar menunjukkan kenon linieran fungsinya (objektif). Dalam pencarian solusi optimalnya juga berbagai variabel, koefisien, kendala dan metode pendekatan dalam fungsi objektif sangat besar pengaruhnya.

Metode solusi yang tersedia dalam pencarian solusi masalah program nonlinier dengan kendala linier dan nonlinier sebagian besar terdiri dari dua langkah utama yakni pencarian arah dan panjang langkah yang fisibel dengan hasil solusi yang berbentuk pecahan misalnya metode pendekatan Zoutendijk (lihat Rao; 1978 dan Bazaraa; 1979).

Dalam banyak situasi, hasil solusi program nonlinier seringkali dikehendaki berbentuk integer dan menghindari dua langkah pencarian utama tersebut. Pendekatan metode untuk mencari solusi program nonlinier ini belum diketahui. Oleh sebab itu perlu usaha untuk mengkaji metode yang tepat yang digunakan dalam pencarian solusi program nonlinier dengan hasil integer melalui pendekatan metode *cutting plane* yang dikembangkan oleh Kelley (1960) dan Gomory (1958) (lihat Rao; 1978 dan Minoux; 1983).

Metode *Cutting Plane* Kelley merupakan teknik yang efisien untuk solusi program nonlinier khususnya program konveks dengan mentransformasikan fungsi objektif dan kendala menjadi linier, kemudian masalah program linier dicari solusinya menggunakan metode simpleks dual. Dalam kasus mencari solusi optimal integer, masalah program linier yang ditentukan ditransformasikan kembali ke bentuk program linier integer dengan menggunakan pendekatan *cutting plane* Gomory dalam setiap langkah iterasinya (lihat Minoux; 1983 dan Ravindran, Phillips dan Solberg; 1987).

Transformasi program nonlinier ke bentuk program linier dan program linier integer seperti yang dilakukan pada proses pendekatan yang dikemukakan di atas, akan membantu pengkajian dan pengembangan lebih mendalam dalam program nonlinier.

Kajian ini merupakan lanjutan dari kajian keoptimalan fungsi nonlinier dengan solusi integer melalui pendekatan metode Zoutendijk yang ditransformasikan ke dalam masalah grup (group problem).

TINJAUAN PUSTAKA

Suatu masalah minimisasi fungsi nonlinier berbentuk:

Minimalkan $f(\mathbf{x})$

dengan kendala

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \; ; i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$h_i(\mathbf{x}) = 0 \; ; i = 1, 2, \ldots, p,$$

dimana $\mathbf{x} \in X$,

dimana f, $g_1, \ldots, g_m$, $h_1, \ldots, h_p$ adalah fungsi yang terdefinisi pada E_n, X adalah subset dari E_n, $\mathbf{x}$ adalah vektor n komponen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, f adalah fungsi objektif, setiap kendala $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ untuk $i = 1,2,\ldots,m$ disebut kendala pertidaksamaan dan $h_i(\mathbf{x}) = 0$ untuk $i=1,2,\ldots,p$ disebut kendala persamaan. Vektor $\mathbf{x} \in X$ yang memenuhi semua kendala disebut solusi fisibel untuk masalah. Koleksi semua solusi fisibel membentuk daerah fisibel. Masalah program nonlinier merupakan penemuan titik fisibel $\bar{\mathbf{x}}$ sedemikian sehingga $f(\mathbf{x}) \geq f(\bar{\mathbf{x}})$ untuk setiap titik fisibel **x**. Titik $\bar{\mathbf{x}}$ yang demikian ini disebut solusi optimal atau secara sederhana solusi bagi permasalahan tersebut.

Masalah program linier dinyatakan dengan

Minimalkan $z = c^T\mathbf{x}$,

dengan kendala

$A^T\mathbf{x} = b$, dan

$\mathbf{x} \geq 0$, $\mathbf{x}_j$ integer ($\forall\ j = 1, \ldots, n$),

dinamakan program linier integer.

Beberapa alternatif solusi program integer yang digunakan dalam perhitungan solusi optimal bagi masalah yang dibatasi bernilai integer antara lain menggunakan Metode Pemotongan Bidang Gomory (*Gomory Cutting Plane*) dan Metode Pencabangan (*Branch Method*) dan Pembatasan (*Bound Method*).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut ini algoritma metode Cutting Plane Kelley-Gomory:

1. Dimulai dengan titik awal X_1, dan mengatur nomor iterasi sebagai $i = 1$. Titik X_1, tidak perlu fisibel.
2. Fungsi-fungsi kendala $g_j(X)$ pada titik X_i dilinierkan sebagai

   $g_j(X) \approx g_j(X_i) + \nabla\ g_j(X_i)^T(X-X_i)$, $j = 1, 2, \ldots, m$.
3. Memformulasikan masalah program linier aproksimasi sebagai berikut:

   Meminimalkan C^TX terhadap

   $g_j(X_i) + \nabla\ g_j(X_i)^T(X-X_i) \leq 0$,

   $j = 1, 2, \ldots, m$

   Masalah pada program lnier dalam pertidaksamaan (2) seringkali memiliki solusi yang tidak terbatas. Hal ini dapat dihindari dengan memformulasikan masalah program linier aproksimasi awal dengan memberikan kendala berikut:

   $l_i \leq \mathbf{x} \leq u_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$

   Dalam pertidaksamaan (3), l_i dan u_i menunjukkan batas bawah dan atas pada x_i Nilai l_i dan u_i, bergantung pada masalah yang dicari solusinya, dan nilai l_i dan u_i tersebut dipilih sedemikian sehingga solusi optimal dan masalah awal, yaitu persamaan (1), tidak terletak diluar daerah hasil yang ditentukan oleh pertidaksamaan (3).

4. Mencari solusi masalah program linier aproksimasi untuk memperoleh vektor solusi X_{i+1}.
5. Jika Solusi X_{i+1} noninteger, maka solusi tersebut diintegerkan menggunakan metode cutting Plane Gomory sebagai berikut:

   a : (Reduksi Masalah). Lihat untuk solusi integer yang baik. Jika tak satupun diperoleh, lanjutkan **Langkah b.** Sebaliknya misalkan $\hat{Z}$ adalah nilai dari solusi ini. Fungsi objektif dalam bentuk kanonik sehubungan dengan basis optimal:

   $$Z = Z_0 + \sum \bar{c}_j x_j$$

   dimana Z_0 adalah nilai optimal kontinu dan J adalah himpunan dari subskrip variabel bukan dasar). Jadi $\forall j \in J : \bar{c}_j \geq 0$ (semua harga tereduksi ≥ 0). Untuk setiap variabel x_j sedemikian sehingga $\bar{c}_j > \hat{Z} - Z$ harus nol dalam suatu solusi optimal dan mungkin akan tereliminasi dari masalah.

   b : Misalkan $J' = \{j \in J \,/\, \bar{c}_j = 0\}$. **Jika** nilai Z_0 integer dan jika $J' \neq \varnothing$, lanjutkan **Langkah d.** Sebaliknya tambahkan cutting-plane dengan metode "Penurunan Kongruensi" hingga masalah yang diperbesar memiliki suatu solusi integer (fisibel dual). Jika solusi ini juga fisibel primal (yakni jika $x_j > 0$ untuk semua j), maka merupakan suatu solusi integer optimal pada masalah. Selesai. Lanjutkan **Langkah 6.** Jika sebaliknya, maka lanjutkan ke **Langkah** c:

   c : Memecahkan masalah yang diperbesar dalam variabel[4] kontinu dengan Metode Simpleks Dual. Jika solusi optimal yang diperoleh adalah integer, maka merupakan solusi optimal pada masalah integer. Selesai. Lanjutkan ke **Langkah 6.** Sebaliknya ke **Langkah b** (kemungkinan setelah tereliminasi suatu jumlah dan cutting plane non-aktif).

   d : Lihat dengan enumerasi implisit untuk solusi integer pada $A\mathbf{x} = b$ dengan $x_j = 0$ untuk $j \in J\text{-}J'$. Jika ada satu, maka merupakan solusi integer optimal pada masalah: Selesai. Sebaliknya tambahkan potongan

$$\sum_{j \in J-J'} x_j \geq 1 ,$$

dan laksanakan langkah tunggal Metode Simpleks Dual dengan menentukan pivot pada kendala ini dan kembali pada **Langkah b.**

6. Mengevaluasi kendala-kendala asal di X yakni menentukan $g_j(X_{i+1}), j = 1, 2, ..., m$. Jika $g_j(X_{i+1}) \geq \varepsilon$ untuk $j = 1, 2, ..., m$, atau

$$\left| \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{f(x_i)} \right| \leq \varepsilon$$

dimana ε adalah toleransi positif yang ditunjuk, semua kendala-kendala asal dapat diasumsikan terpenuhi. Karenanya hentikan prosedur dengan mengambil $X_{opt} \sim X_{i+1}$. Jika $g_j(X_{i+1}) > \varepsilon$ untuk beberapa nilai j, tentukan kendala-kendala yang sangat melanggar sebagai

$$g_k(X_{i+1}) = \underset{j}{maks} \, [g_j(X_{i+1})].$$

Linierkan kembali kendala $g_k(X) < 0$ pada titik X_{i+1} sebagai

$$g_k(X) \sim g_k(X_{i+1}) + \nabla \, g_k(x_{i+1})^T \, (X - X_{i+1}) \leq 0$$

dan tambahkan pertidaksamaan (9) ini hingga kendala ke (m+1) pada masalah program linier terdahulu.

7. Mengatur nomor iterasi baru dengan $i = i+1$, total jumlah kendala-kendala dalam masalah program linier aproksimasi baru sebagai $m = m+1$, dan lanjutkan ke **Langkah 4.** (5)

Contoh:

Minimumkan $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ dengan kendala $g_1(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 1 \leq 0$ menggunakan Metode Cutting Plane Kelley-Gomory. Limit kekonvergenan $c = 0{,}02$.

Solusi: (7)

Karena kendala dapat diidentifikasikan sebagai elips, masalah ini merupakan masalah program konveks. **Langkah 1, 2, 3:** Meskipun dapat memulai solusi dan titik awal X untuk menghindari solusi yang tidak terbatas, diambil batas pada x_1 dan x_2 dengan -2□x_1□2 dan -2□x_2□2 dan dicari solusi masalah program linier dengan meminimumkan $f = x_1 - x_2$ dengan (8) kendala -2□ x_1 □2 dan -2 □x_2 □2. Solusi yang diperoleh dengan metode simpleks adalah $X_2 = (-2, 2)^T$.

Langkah 4. Jadi, diperoleh $X_2 = \begin{Bmatrix} -2 \\ 2 \end{Bmatrix}$.

(9)

Langkah 6. $g_1(X_2) = 23 > \varepsilon$, $g_1(X)$ dilinierkan pada titik x_2 menggunakan persamaan (1) sehingga diperoleh $g_1(X) \approx -16x_1 + 8x_2 - 25 \leq 0$. Dengan penambahan kendala ini pada masalah program linier sebelumnya, masalah program linier baru menjadi:

minimumkan $f = x_1 - x_2$ dengan kendala -2□ x_1 □2, -2 □x_2□2 dan $-16x_1 + 8x_2 - 25 \leq 0$

Langkah 7. Atur bilangan iterasi dengan i = 2 dan lanjutkan **Langkah 4.**

Langkah .4. Solusi masalah diatas dengan metode simpleks, adalah X_3= (-9/16, 2) dengan $f(X_3)$ = -2,5625.

Langkah 5. Karena Variabel pada X ada yang noninteger, maka digunakan metode cutting Plane Gomory untuk mengintegerkan variabel tersebut. Pertama tambahkan kendala baru dari pertidaksamaan (5) sehingga diperoleh $-2x_5 - x_6 + x_8 = -9$. Selanjutnya diperoleh $X_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix}$.

Langkah 6. $g_1(X_3) = \varepsilon > c$, $g_i(X)$ dilinierkan pada X_3 sesuai dengan persamaan (1), maka $g_1(X_3) = -4x_1 + 4x_2 - 5 \leq 0$ dan masalah program linier menjadi minimalkan $f = x_1 - x_2$ dengan kendala -2□x_1□2, -2 □x_2□2 , $-16x_1 + 8x_2 - 25 \leq 0$ dan $-4x_1 + 4x_2 - 5 \leq 0$.

Langkah 7. Atur nomor iterasi i = 3 dan lanjutkan ke **Langkah 4.**

Langkah 4. Cari solusi masalah program linier dengan metode simpleks dan diperoleh $X_4 = \begin{Bmatrix} 3/4 \\ 2 \end{Bmatrix}$.

Langkah 6. Linierkan $g_i(X)$ menurut persamaan (1) pada X_4 dan didapatkan $g_1(X_4) = (1/2)x_1 + (5/2)x_2 + 11/8 \leq 0$.

Langkah 7. Atur nomor iterasi i =4 dan lanjutkan ke **Langkah 4.**

Langkah 4. Cari solusi masalah program linier dengan metode simpleks dan didapat $X_5 = \begin{Bmatrix} -2 \\ 2 \end{Bmatrix}$.

Langkah 6. Linierkan $g_i(X)$ pada X_5 menurut persamaan (1), dan diperoleh $g_1(X_5) = -16x_1 + 8x_2 - 25 \leq 0$. Selanjutnya dibentuk masalah program linier meminimumkan $f = x_1 - x_2$ dengan kendala -2□x_1□2, -2 □x_2□2 , $-16x_1 + 8x_2 - 25 \leq 0$, $-4x_1 + 4x_2 - 5 \leq 0$ dan $(1/2)x_1 + (5/2)x_2 + 11/8 \leq 0$.

Langkah 4. Diperoleh solusi yang sama seperti pada iterasi i = 4 dengan $X_6 = \begin{Bmatrix} -2 \\ 2 \end{Bmatrix}$.

Iterasi dihentikan karena telah diperoleh kekonvergensian sesuai dengan pertidaksamaan (7) dengan $X_{opt} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 2 \end{Bmatrix}$, $f(x_1, x_2) = 4$.

KESIMPULAN

Disimpulkan dari hasil bahwa program nonlinier yang diselesaikan dengan metode cutting plane Kelley dapat menghasilkan nilai yang integer jika diaplikasikan dengan metode cutting plane Gomory. Jadi, setiap langkah pada iterasi pada metode cutting plane Kelley yang mentransformasikan bentuk nonlinier menjadi linier, jika hasilnya noninteger dapat diubah menjadi integer dengan metode cutting plane Gomory.

DAFTAR PUSTAKA

Bazaraa, S. M. & Shetty, C. M. 1979, *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms*, Atlanta, Georgia.

Bronson, R. & Wospakrik, H. J. 1993, *Teori dan Soal-Soal Operations Research*, Erlangga.

Fraleigh, J. B. 1989, *A First Course in Abstract Algebra*, 4th edn, Addison-Wesley Publishing Company, Inc, Canada.

Gill, E. P., Murray, W. & Wright, M. H. 1991, *Numerical Linear Algebra and Optimization*, John Wiley & Sons Ltd, Paris.

Rao, S. S. 1978, *Optimization, Theory and Applications*, 2nd edn, John Wiley & Sons, New York.

Ravindran, A., Phillips, D. T. & Solberg, J. J. 1987, *Operations Research: Principles and Practice*, 2nd edn, John Wiley & Sons, New York.

Supranto, J., M.A. 1983, *Linear Programming, Edisi Kedua*, Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia.

Wolfe, C. S. 1985, *Linear Programming with Basic and Fortran*, Reston Publishing Company, A Prentice-Hall Company, Reston, Virginia