Jurnal Penelitian Sains : hal 44 - 59
No.14. Oktober 2003 ISSN: 1410-7058

PENENTUAN FACET SUATU POLYTOPE KNAPSACK DENGANMINIMAL COVER

Wamiliana
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung

ABSTRAK

Dalam representasi suatu polytop, facet memainkan peranan yang penting sebab karakterisasi dari facet akan merepresentasikan polytop. Facet adalah bentuk persamaan dari pertidaksamaan-pertidaksamaan yang sah (valid inequalities) dari suatu polytop, sedangkan dari valid inequalities tersebut dapat ditentukan 'cover' dari polytop tersebut yang berupa 'strong cover' maupun 'minimal cover'. Setiap strong cover mendefinisikan facet, tetapi tidak demikian halnya dengan minimal cover. Dalam tulisan ini akan diberikan bagaimanakan cara agar suatu minimal cover dari polytop P dapat menjadi facet dari polytop tersebut.

Kata kunci: *polyhedron, polytop, knapsack, valid inequalities, facet, cover*

I. PENDAHULUAN

Dalam riset operasi, masalah knapsack masuk dalam kategori bidang optimisasi. Jika diberikan pertidaksamaan berikut : $\sum_{j \in N} a_j x_j \leq a_0$ (1)

dengan $N = \{1,2,3,...,n\}$;

$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n \geq 0$; $x_j \in \{0,1\}$; j = 1,2,3,...,n-1, $a_j \in N \quad \forall j = 0,1,2,\ldots,n$.

Himpunan $P = conv\ \{\ x \in \{0,1\}^n$: $\sum_{j \in N} a_j x_j \leq a_0\ \}$ disebut **polytop knapsack.** Sebuah **polyhedron** $P \subseteq \mathbb{R}^n$ adalah himpunan titik titik yang memenuhi pertidaksamaan yang hingga, yaitu $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, dengan *(A,b)* adalah m $\times$ (n+1) matrix. Sebuah polyhedron yang terbatas disebut dengan sebuah **polytop**. Pertidaksamaan $\pi x \leq \pi_0$ disebut pertidaksamaan yang valid untuk P jika pertidaksamaan tersebut dipenuhi oleh semua titik di P. Jika $\pi x \leq \pi_0$ adalah pertidaksamaan yang valid untuk P dan $F = \{x \in P: \pi x = \pi_0\}$, F disebut dengan **face** (muka) dari P dan kita mengatakan bahwa

Jurnal Penelitian Sains : hal 44 - 59
No.14. Oktober 2003 ISSN: 1410-7058

$\pi x \leq \pi_0$ *merepresentasi* F. Sebuah face dari P disebut *murni* jika $F \neq \emptyset$ dan $F \neq P$.

Sebuah himpunan dari titik titik $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ disebut **affinely independent** (bebas affine) jika solusi yang unik dari persamaan persamaan $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0$, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$ adalah $\alpha_i = 0$ untuk $i = 1,2,\ldots,k$. Sebuah polyhedron P disebut mempunyai *dimensi* *k*, dan dinotasikan dengan dim (P) = k, jika jumlah maksimum dari titik titik yang bebas affine di P adalah k + 1. Jika F adalah face dari P dan dim (F) = dim (P)- 1, maka F disebut sebuah **facet** dari P.

Sebuah himpunan $S \subseteq N$ disebut sebuah **cover** untuk persamaan (1) jika

$$\sum_{j \in S} a_j > a_0 \qquad (2)$$

Jika $F = \{x \in P: \pi x = \pi_0\}$ adalah sebuah facet untuk P, maka F disebut sebuah **facet yang kanonik** jika pertidaksamaan yang mendefinisikan $\pi x \leq \pi_0$ adalah dalam bentuk $\sum_{j \in M} x_j \leq k$, dengan $M \subseteq N$ dan $k \in$ Z^+. Sebuah cover S untuk persamaan (1) disebut sebuah **minimal cover** jika

$$\sum_{j \in Q} a_j \leq a_0 \qquad (3)$$

$\forall$ himpunan bagian murni Q dari S. Himpunan $E(S) = S \cup S'$ dengan $S' = \{ j \in N \backslash S : a_j \geq a_{j1} \}$ dan $a_{j_1} = \max\{a_j : j \in S\}$, disebut *Perluasan dari S terhadap N.*

Fakta-fakta tentang **strong cover** berikut didiskusikan dalam Wamiliana (1996).

Fakta-fakta: Sebuah himpunan $S \subseteq N$ adalah sebuah strong cover untuk (1) jika dan hanya jika himpunan tersebut memenuhi:

i). $\sum_{j \in S} a_j > a_0$

ii). $\sum_{j \in Q} a_j \leq a_0$, untuk semua himpunan bagian murni Q dari S

iii). Jika E(S) ≠ N, maka $\sum_{j \in (S \backslash \{j_1\}) \cup (i_1)} a_j \leq a_0$ dengan $a_{j_1} = \max\{a_j : j \in S\}$ dan $a_{i_1} = \max\{a_j : j \in N \backslash E(S)\}$.

Tulisan ini bertujuan untuk memberikan kondisi kondisi tertentu agar suatu minimal cover dari suatu polytop knapsack merupakan juga sebuah facet, serta memberikan bukti-

Jurnal Penelitian Sains ; hal 44 - 59
No.14. Oktober 2003 ISSN: 1410-7058

bukti dari teorema-teorema yang berkaitan dengan hal tersebut.

Adapun sistematika penulisan disusun sebagai berikut: Bagian I memuat pendahuluan yang berisi definisi-definisi dan istilah–istilah yang akan digunakan dalam tulisan ini serta tujuan dari tulisan ini. Bagian II mendiskusikan teori-teori yang akan digunakan untuk mencapai tujuan tersebut yaitu bagaimana membuat suatu minimal cover agar menjadi facet, serta bagian III berisi kesimpulan.

II. Facet dari Minimal Cover

Seperti telah disebutkan sebelumnya bahwa penentuan facet adalah sangat penting dalam representasi polytop. Proses penentuan facet itu sendiri banyak caranya, salah satunya adalah dengan cara pengangkatan berurutan (Sequentially Lifted Facet). Nemhauser dan Wolsey (1988) menyatakan bahwa suatu minimal cover dengan bilangan kardinal tertentu adalah juga facet.

Sebelum membahas teori yang memberikan kondisi kondisi yang diperlukan oleh sebuah minimal cover untuk menjadi sebuah facet, di bawah ini akan dibahas sebuah lemma yang membantu dalam penyusunan bukti dari teori yang akan kita gunakan.

Lemma 1: Misalkan $\mathcal{S}$ dinotasikan sebagai family dari minimal cover untuk persamaan (1) dan misalkan $Q=\{x \in \mathrm{R}^n: \sum_{j \in E(S)} x_j \leq |S| - 1, S \in \mathcal{S}\}$, maka $x \in \{0,1\}^n \cap P \Leftrightarrow x \in \{0,1\}^n \cap Q$.

Bukti : lihat Wamiliana (1996).

Balas dan Zemel (1978) dalam tulisannya membuktikan bahwa setiap strong cover mendefinisikan facet bagi polytop knapsack. Tetapi, bagaimana dengan minimal cover? Jelas, belum tentu semua minimal cover dari suatu polytop knapsack mendefinisikan facet. Ada beberapa kondisi kondisi tertentu yang harus dipenuhi oleh sebuah minimal cover agar minimal cover tersebut dapat mendefinisikan facet dari suatu polytop knapsack.

Lebih jauh, Balas dan Zemel (1978) memberikan suatu prosedur yang memberikan hubungan antara minimal cover dengan facet dari polytop knapsack sebagai berikut :

Jurnal Penelitian Sains ; hal 44 - 59
No.14. Oktober 2003 ISSN: 1410-7058

Misalkan S adalah minimal cover untuk persamaan (1) dan misalkan $N\text{-}S$ = $\{j_1,\ldots,j_p\}$ urutan sembarang dengan p = $|N - S|$, dan pandang barisan polytop knapsack Kn yang di definisikan secara rekursif sebagai:

$$z_{ji} = \max \sum_{j\in S} x_j + \sum_{j=j1}^{ji-1} \beta_j x_j,$$

$$\sum_{j\in S} a_j x_j + \sum_{j=j1}^{ji-1} a_j x_j \le a_0 - a_{j0},$$

$$x_j = 0 \text{ atau } 1, \quad j \in S \cup \{j1,\ldots,j_i - 1\}$$

dengan , i = $1,2,\ldots,p$ dan $\beta_j = |S| - 1 - z_j, j = j1,\ldots ji - 1,$ maka pertidaksamaan

$\sum_{j\in S} x_j + \sum_{j\in N-S} \beta_j x_j \le |S| - 1$ adalah facet dari P.

Facet yang didapat dari prosedur di atas disebut dengan facet yang di angkat secara berurutan (Sequentially lifted facets).

Dari prosedur di atas kita tahu bahwa beberapa minimal cover dapat menjadi facet dengan kondisi kondisi tertentu. Selain itu, ada beberapa kondisi lain yang dapat juga digunakan untuk mengubah sebuah minimal cover menjadi facet dari polytop knapsack.

Beberapa proposisi dan teorema di bawah ini akan memberikan kondisi kondisi tersebut .

Proposisi 1 : Untuk setiap minimal cover S dan semua $i \in$ N - S, maka $\beta_i = h$ dengan h didefinisikan sebagai:

$$\sum_{j\in S-Sh+1} a_j \le a_0 - a_i \sum_{j\in S-sh} a_j$$

Bukti :

Definisikan $\bar{x}$ sebagai

$$\bar{x}_j = \begin{cases} 1; & j \in S - S_{n+1} \\ 0; & j \in S_{n+1} \end{cases}$$

, dengan $\bar{x}$ adalah solusi dari K_i'. Karena $\bar{x}$ adalah layak (feasible) dan berdasarkan definisi dari h dan $z_i' = |S|$ -(h+ 1), maka $\beta_i' = |S|$ -1- $z_i' = h$.

$\bar{x}$ juga optimal sebab dari definisi h dan dari pengurutan anggota S, tidak ada solusi layak yang lebih besar dari $|S|$ -(h+ 1) adalah sama dengan 1.

Proposisi 2: Untuk setiap barisan Q = $\{j_1,\ldots,j_p\}$, $Q \subset N$ - S dan setiap barisan $Q_k = \{j_1,\ldots,j_k\}, 0 \le k \le p$, maka $\beta_{ji}(Q) \le \beta_{ji}(Q_k)$, $i = p+1,\ldots,n.$

Bukti :

Setiap solusi layak untuk $K_{ji}(Q_k)$ adalah solusi yang layak juga terhadap $K_{ji}(Q)$;

maka $z_{ji}(Q) \geq z_{ji}(Q_k)$. Dengan perkataan lain $\beta_{ji}(Q) \leq \beta_{ji}(Q_k)$.

Proposisi 3: Jika $\sum_{j\in S} x_j + \sum_{j\in N\setminus S} \alpha_j x_j \leq |S|-1$ adalah pertidaksamaan yang valid untuk P, maka $\alpha_j \leq \beta_j, \forall j \in N-S$

Bukti :

Asumsikan bahwa untuk beberapa $i \in N\text{-}S$, $\alpha_i > \beta_i$. Dari prosedur penentuan facet secara berurutan, $\beta_i' = |S|-1-z_i'$, dengan z_i' adalah nilai objektif dari problem knapsack K_i' : max $\sum_{j\in S} x_j$, kendala : $\sum_{j\in S} a_j x_j \leq a_0 - a_i$, x_j =0 atau 1, $j \in S$. Misalkan $\bar{x} \in R^{|S|}$ adalah solusi yang optimal untuk K_i'. Maka $x \in R^n$ yang didefinisikan sebagai:

$$\bar{x}_j = \begin{cases} x_j ; j \in S; \\ 1; j = i \\ 0; j \in N \setminus S \cup \{i\} \end{cases},$$

memenuhi $\sum_{j\in N} a_j x_j \leq a_0$, tetapi tidak memenuhi pertidaksamaan dalam proposisi karena $\sum_{j\in S} \bar{x}_j + \sum_{j\in N-S} a_j \bar{x}_j = z_i' + \alpha_i > |S|-1$.

Proposisi 4: Misalkan S adalah minimal cover untuk persamaan (1) , $E(S)$ adalah perluasan dari S dan Sh adalah himpunan h elemen pertama dari S, $h = 1,2,..., |S|$. Misalkan N dipartisi menjadi $N_0, N_1, \ldots, N_q$, q =|S|-1, dengan

$$\left.\begin{aligned} &N_0 = N - E(S), \quad N_1 = E(S) - \bigcup_{h=2}^{q} N_h, \\ &N_h = \{i \in E(S) \mid \sum_{j\in Sh} a_j \leq a_i < \sum_{j\in Sh+1} a_j\}, h = 2,\ldots,q \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

definisikan $\pi_j = h, \forall j \in N_h, h = 0,1,\ldots,q.$ (5)

Maka $\sum_{j\in S} x_j + \sum_{j\in N\setminus S} \pi_j x_j \leq |S|-1$ dipenuhi oleh setiap titik di P. Lebih jauh, jika $\sum_{j\in S\setminus Sh-1} a_j \leq a_0 - a_i, \forall i \in N_h, h = 0,1,\ldots,q$,

maka $\sum_{j\in S} x_j + \sum_{j\in N\setminus S} \pi_j x_j \leq |S|-1$ (6)

adalah facet untuk P.

Bukti :

Pertama kita buktikan bahwa (6) dipenuhi oleh $x \in P$ jika (4) dan (5) terpenuhi dengan menunjukkan bahwa tiap titik 0,1 yang tidak memenuhi (6) dengan kondisi ini, juga tidak memenuhi (1). Misalkan $\bar{x}$ tidak memenuhi (6) dan misalkan $J_k = \{j \in N : \bar{x}_j = k\}$, k=0,1.

Jika $\sum_{j\in N\cap J_1} a_j \geq \sum_{j\in S} a_j$,maka $\sum_{j\in N\cap J_1} a_j \geq a_0$,atau

x tidak memenuhi (1). Sekarang, asumsikan $\sum_{j\in N\cap J_{11}} a_j < \sum_{j\in S} a_j$ dan $\pi_0 = |S| - 1$ s erta definisikan vektor biner 0-1 sebagai berikut :

(i) $\tilde{x}_j = \bar{x}_j$ jika tidak dispesifikasikan oleh (ii) dan (iii).

(ii) $\tilde{x}_j = 1 - \bar{x}_j = 1$ untuk $j \in \overline{N}_1$, dengan $\overline{N}_1$ adalah himpunan bagian sembarang dari $N_1 \cap J_0$ dengan bilangan kardinal $|\overline{N}_1| = \pi_0 - |N_1 \cap J_1| + 1$

(iii) $\tilde{x}_j = 1 - \bar{x}_j = 0$ untuk $j \in \widetilde{N}_h \subseteq (N_h \cap J_1)$, h=2,...,q dengan $\sum_{h=2}^{q} h|\widetilde{N}_h| = |\overline{N}_1|$.

dari definisi, $\tilde{x}_j, \bar{x}_j = 1$ untuk tepat $|S|$ indeks $j \in N_1$.

Maka $\sum_{j\in N} a_j \tilde{x}_j \geq \sum_{j\in N_1} a_j \tilde{x}_j \geq \sum_{j\in S} a_j > a_0$,

karena S adalah cover. Hal ini membuktikan bahwa $\tilde{x}$ tidak memenuhi (1). Kita buktikan bahwa $\bar{x}_j$ juga tidak memenuhi (1) dengan menunjukkan bahwa

$\sum_{j\in N} a_j \bar{x}_j - \sum_{j\in N} a_j \tilde{x}_j \geq 0$. Dari definisi $\tilde{x}$, kita dapatkan :

$$\sum_{j\in N} a_j(\bar{x}_j - \tilde{x}_j) = \sum_{h=2}^{q}\sum_{j\in \widetilde{N}_h} a_j - \sum_{j\in \overline{N}_1} a_j = \sum_{h=2}^{q}\sum_{j\in \widetilde{N}_h}(a_j - \sum_{i\in R_j} a_i)$$

, dengan $R_j \subseteq \overline{N}_1$ adalah disjoint dan $|R_j| = h$, $\forall j \in \widetilde{N}_h$, h = 2,...,q. Tetapi $\sum_{i\in R_j} a_i \leq \sum_{i\in S_h} a_i \leq a_j$, $\forall j \in N_h$, h = 2,...,q , untuk semua himpunan bagian $R_j \subseteq N_1$ dengan bilangan kardinal $|R_j|$=h. Kita telah tunjukkan bahwa (6) dipenuhi $\forall$ $x \in P$ jika (4) dan (5) terpenuhi. Sekarang kita asumsikan bahwa

$$\sum_{j\in S\setminus S_{h-1}} a_j \leq a_0 - a_i, \forall i \in N_h, h=0,...,q$$

terpenuhi. Sekarang kita tunjukkan bahwa (6) mendefinisikan facet untuk P dengan mendapatkan n buah vektor yang bebas linear dari P yang memenuhi :

$$\sum_{j\in S} x_j + \sum_{j\in N\setminus S} \pi_j x_j = |S| - 1 \qquad (6').$$

Jurnal Penelitian Sains : hal 44 - 59
No.14. Oktober 2003
ISSN: 1410-7058

Perhatikan matriks ukuran n x n berikut :

$$X = \begin{bmatrix} I_{n_q} & . & . & . & 0 & 0 & B_q & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & & & & I_{n_2} & 0 & B_2 & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & I_p & B_1 & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 & B_0 & I_{n_0} \end{bmatrix}$$

dengan I_{n_h} adalah matriks identitas dengan orde $n_h = |N_h|$, $h=0,\dots,q$; I_p adalah matriks identitas dengan orde $p = n_1 - \pi_0 - 1$, 0 adalah matriks nol dengan dimensi yang sesuai , B_h, $h=0,\dots,q$ adalah matriks dengan $|S|$ kolom dan baris yang identik dalam bentuk : $b_h = (0 \;,\; \dots \;,\; 0 \;,\; 1 \;.\; \dots \;,\; 1)$, dengan jumlah baris adalah p untuk $h = 1$, n_h untuk $h = 0$ dan $h = 2,\dots,q$. $C = (c_{ij})$ adalah $(\pi_0 + 1)$ x $(\pi_0 + 1)$ matriks . C adalah nonsingular dan det (X) = det (I_{n_q}) x det (I_p) x det (C) x det $(I_{n_0}) \neq 0$.

Maka n baris x^i dari x adalah bebas linear . Lebih jauh, $\sum_{j\in N} \pi_j x_j^i = h + (\pi_0 - h) = \pi_0$.

Untuk vektor baris x^i yang berhubungan dengan I_p dan I_{n_h}, $h=2,\dots,q$, dan vektor vektor x^i memenuhi (6') untuk barisan barisan sisanya, karena baik C maupun B_0 mempunyai tepat π_0 entri yang sama dengan 1 pada tiap baris, sementara $\pi_j = 1, \forall j \in N_1$ dan $\pi_j = 0, \forall j \in N_0$. Maka (6') dipenuhi untuk tiap n baris dari x yang bebas linear.

Lemma 2 : Untuk $j \in Q \subset N - S$, misalkan γ_j adalah sembarang bilangan real, dan misal $Q' = \{j \in Q | \gamma_j \le \pi_j\}$ dengan π_j adalah koefisien yang didefinisikan seperti dalam proposisi 4. Maka untuk sembarang $i \in N - S \cup Q$, masalah knapsack G_i :

$$\max \sum_{j\in S} x_j + \sum_{j\in Q} \gamma_j x_j$$

kendala : $\sum_{j\in S} a_j x_j + \sum_{j\in Q} a_j x_j \le a_0 - a_i$,

$x_j = 0$ atau 1, $\forall\ j \in S \cup Q$

mempunyai sebuah solusi optimal $\bar{x}$ sedemikian sehingga $\bar{x}_j = \begin{cases} 1; & j \in S - S_h \\ 0; & j \in S_h \end{cases}$

 ISSN: 1410-7058

untuk beberapa bilangan bulat h $1 \le h \le |S| - 1$ dan $\bar{x}_j = 0$, $\forall\ j \in Q'$.

Bukti:

Pertama kita tunjukkan bahwa dengan setiap solusi optimal dari G_i yang tidak memenuhi

$$\bar{x}_j = \begin{cases} 1; & j \in S - S_h \\ 0; & j \in S_h \end{cases},$$

kita dapat menemukan solusi optimal lain yang memenuhinya. Misalkan $\bar{x}$ adalah solusi optimal dari G_i yang tidak memenuhi

$$\bar{x}_j = \begin{cases} 1; & j \in S - S_h \\ 0; & j \in S_h \end{cases},$$

dan misalkan k adalah anggota terbesar dari S sedemikian sehingga $\bar{x}_k = 0$. Misalkan S_k menunjukkan himpunan yang merupakan k anggota pertama dari S, dan misalkan $\bar{S}_k = \{j \in S_k | \bar{x}_j\}, |\bar{S}_k| = k_0$. Berdasarkan hipotesis, $\bar{S}_k \ne \emptyset$, dengan perkataan lain $k_0 > 0$. Karena $h, i \in S$, $h < i$, maka $a_h \ge a_i$. Jadi, $\bar{x}$ yang didefinisikan

$$\text{sebagai} \quad \tilde{x}_j = \begin{cases} 0, j \in S_{k-k_0} \\ 1, j \in S - S_{k-k_0} \\ \bar{x}_j, j \in Q \end{cases}$$

adalah solusi yang layak untuk G_i yang memenuhi

$$\bar{x}_j = \begin{cases} 1; & j \in S - S_h \\ 0; & j \in S_h \end{cases},$$

dan karena $\sum_{j \in S} \tilde{x}_j = \sum_{j \in S} \bar{x}_j$, $\tilde{x}$ juga optimal. Maka $\tilde{x}$ memenuhi

$$\bar{x}_j = \begin{cases} 1; & j \in S - S_h \\ 0 & ; j \in S_h \end{cases}$$

dengan $h = k - k_0$.

Selanjutnya kita tunjukkan bahwa setiap solusi optimal untuk G_i yang memenuhi

$$\bar{x}_j = \begin{cases} 1; & j \in S - S_h \\ 0; & j \in S_h \end{cases}$$

tetapi tidak memenuhi $\bar{x}_j = 0$, $\forall\ j \in Q'$, kita akan mendapatkan solusi optimal lain yang memenuhi

$$\bar{x}_j = \begin{cases} 1; & j \in S - S_h \\ 0; & j \in S_h \end{cases}$$

dan $\bar{x}_j = 0$, $\forall\ j \in Q'$.

Misalkan $\tilde{x}$ adalah solusi optimal untuk G_i yang memenuhi

$$\bar{x}_j = \begin{cases} 1; & j \in S - S_h \\ 0; & j \in S_h \end{cases}$$

tetapi tidak memenuhi $\bar{x}_j = 0$, $\forall\ j \in Q'$, dan misalkan $\tilde{Q}' = \{j \in Q | \tilde{x}_j = 1\}$. Dari definisi koefisien π_j, $a_j \ge \sum_{k \in S_{\pi j}} a_k$, $\forall j \in Q$.

Maka $\sum_{j \in \tilde{Q}'} a_j \ge \sum_{j \in \tilde{Q}'} (\sum_{k \in S_{\pi j}} a_k) \ge \sum_{k \in S_p} a_k$. Disini

$p = \sum_{j \in Q'} \pi_j$. Jika $1 \le h \le |S| - 1$, maka $p \le h - 1$. Untuk $p \ge h$, maka

$$\sum_{j \in S \cup Q} a_j \tilde{x}_j \ge \sum_{j \in Q'} a_j + \sum_{j \in S - S_h} a_j \ge \sum_{j \in S_p} a_j + \sum_{j \in S - S_h} a_j \ge \sum_{j \in S} a_j > a_0 .$$

Notasikan himpunan dari p indeks terakhir dalam S_h dengan $S(h,p)$, atau dengan perkataan lain $S(h,p) = S_h - S_{h-p}$, maka akan kita dapatkan : $\sum_{j \in Q'} a_j \ge \sum_{j \in S(h,p)} a_j$. Sekarang

definisikan $\bar{x}$ sebagai $\bar{x} = \begin{cases} 0, j \in Q' \\ 1, j \in S(h,p) \\ \tilde{x}_j, \text{lainnya} \end{cases}$.

Jelas $\bar{x}$ memenuhi $\bar{x}_j = \begin{cases} 1; \ j \in S - S_h \\ 0; j \in S_h \end{cases}$

dan $\bar{x}_j = 0$, $\forall j \in Q'$.

Dari pertidaksamaan $\sum_{j \in Q'} a_j \ge \sum_{j \in S(h,p)} a_j$ dan bahwa $\tilde{x}$ adalah solusi layak, maka $\bar{x}$ juga adalah solusi yang layak. Selain itu, karena koefisien dari nilai objektif untuk tiap tiap x_j, $j \in S(h,p)$ adalah 1, dengan $p = \sum_{j \in Q'} \pi_j$, maka $\bar{x}$ mempunyai nilai objektif yang sama dengan $\tilde{x}$, dengan perkataan lain, $\bar{x}$ adalah solusi optimal.

Proposisi 5: Untuk setiap facet dari P yang diangkat secara berurutan

$, \beta_i' = \begin{cases} \pi_i, i \in I \\ \pi_i + 1, i \in J \end{cases}$

dan $\beta_i = \begin{cases} \pi_i, i \in I \\ \pi_i \text{ atau } \pi_i + 1, i \in J \end{cases}$. Lebih jauh, untuk setiap barisan Q, $Q \subset N\text{-}S$, dan setiap $i \in N\text{-}S \cup Q$, $\beta_i(Q)$ hanya tergantung dari $\beta_j, j \in Q$ sedemikian sehingga $\beta_j = \pi_j + 1$, dengan perkataan lain

$\beta_i(Q) = \beta_i(\hat{Q})$ dengan $\hat{Q} = \{j \in Q \setminus \beta_j + \pi_j + 1\}$

.

Bukti :

Pertama kita buktikan bahwa $\beta_i' = \begin{cases} \pi; i \in I_i \\ \pi_{i+1}; i \in J \end{cases}$ Dari definisi π_i, maka $\sum_{j \in S_m} a_j \le a_i$, dan karena S adalah cover maka $\sum_{j \in S - S_m} a_j > a_0 - a_i$. Untuk $i \in I$, $\sum_{j \in S - S_m + 1} a_j \le a_0 - a_i < \sum_{j \in S - S_m} a_j$. Karena itu dari proposisi 1, $\pi_i = \beta_i'$. Untuk $j \in J$, kondisi $\sum_{j \in S - S_m + 1} a_j \le a_0 - a_i$ tidak terpenuhi.

Jurnal Penelitian Sains : hal 44 - 59
No.14. Oktober 2003
ISSN: 1410-7058

Dengan perkataan lain $a_0 - a_i < \sum_{j \in S_{\pi_i}+1} a_j$. Dari definisi π_i kita dapatkan $\sum_{j \in S_{\pi}+1} a_j > a_i$ dan karena S adalah minimal cover maka $\sum_{j \in S - S_{\pi}+2} a_j \le a_0 - a_i$. Dari pembuktian ini dan dengan menggunakan proposisi 1, kita dapatkan $\beta_i' = \pi_i + 1$. Selanjutnya, kita tunjukkan bahwa barisan sembarang yang digunakan dalam menghitung koefisien β_j, $j \in N - S$, maka akan kita dapatkan $\beta i_i = \pi_i, \forall\, i \in I$.

Karena $\beta i_i \le \beta_i'$, dari proposisi 2 dan $\beta_i' = \pi_i, i \in I$, serta dari prosedur pengangkatan facet secara berurutan, yang perlu kita tunjukkan hanya $\beta i_i \ge \pi_i$. Dengan cara kontradiksi, misalkan hal ini salah, maka untuk beberapa $i \in I$ dan beberapa barisan $Q = \{j1, j2, ..., jq\}$, $Q \subseteq N - S$, $\beta_i(Q) \le \pi_i - 1$. Notasikan $Q \cup \{i\} = Q'$ dan $S \cup Q' = V$, maka pertidaksamaan $\sum_{j \in S} x_j + \sum_{j \in Q} \beta_j x_j \le |S| - 1$ adalah facet untuk P_v. Ganti barisan $\{ j1, j2, ..., jq, i\}$ dengan $\{i, j1, j2, ..., jq\}$ dan $\sum_{j \in S} x_j + \sum_{j \in Q'} \beta_j x_j \le |S| - 1$ adalah facet dari P_v yang didapat dari barisan $\{i, j1, j2, ..., jq\}$ dengan menggunakan prosedur pengangkatan secara berurutan.

Karena $i \in I$ dan i adalah elemen pertama dari barisan, $\bar{\beta}_i = \bar{\beta}_i' = \pi_i$. Maka, berdasarkan asumsi, $\bar{\beta}_i \ge \beta i_i + 1$. Walaupun demikian, karena $\bar{\beta}_i \le \pi_i$, solusi dari tiap problem knapsack menghasilkan koefisien $\bar{\beta}_j$, $j = j_1, j_2, ..., j_q$ yang tidak berubah jika variabel x_i di buang. Maka, solusi ini sama dengan solusi knapsack yang menghasilkan koefisien β_j. Karena itu $\bar{\beta}_i \ge \beta i_i + 1$ dan $\bar{\beta}_j = \beta_j, \forall\, j \in J$. Dengan perkataan lain $\sum_{j \in S} x_j + \sum_{j \in Q'} \bar{\beta}_j x_j \le |S| - 1$ mendominasi $\sum_{j \in S} x_j + \sum_{j \in Q''} \beta_j x_j \le |S| - 1$. Tetapi hasil ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa kedua pertidaksamaan adalah facet untuk P_v. Jadi $\beta_i = \pi_i, \forall\, i \in I$.

Selanjutnya kita buktikan bahwa untuk setiap barisan yang digunakan dalam menghitung

Jurnal Penelitian Sains ; hal 44 - 59
No.14. Oktober 2003 ISSN: 1410-7058

koefisien β_i, $j \in N - S$, akan kita dapatkan $\beta_i \geq \pi_i$, $\forall$ $i \in J$. Untuk $i \in J$, $\sum_{j \in S - S_\pi + 1} a_j \leq a_0 - a_i$ tidak terpenuhi.

Dengan perkataan lain $a_i > a_0 - \sum_{j \in S - S_\pi + 1} a_j$.

Sekarang kita pertimbangkan polytop knapsack yang berdimensi (n+1) sebagai berikut :

$$P' = conv\ \{x \in \{0,1\}^{n+1} : \sum_{j=1}^{n+1} a_j x_j \leq a_0\}$$

yang didapat dari P dengan menambah variabel x_{n+1} dengan koefisien : $a_{n+1} = a_0 - \sum_{j \in S - S_\pi + 1} a_j$. Jelas bahwa S adalah minimal cover untuk P', dan koefisien β_i' dan π_i, $i \in N\text{-}S$ adalah sama untuk P dan P', sebab koefisien tersebut hanya tergantung kepada koefisien a_j, $j \in S \cup \{i\}$. Lebih jauh, dengan pilihan a_{n+1}, maka $\sum_{j \in S - S_\pi + 1} a_j \leq a_0 - a_i$ dipenuhi untuk $i = n+1$. Maka $\beta'_{n+1} = \pi_{n+1}$ dan $\beta'_{n+1} = \pi_{n+1}$. Selain itu, dari definisi , $\pi_i = \pi_{n+1}$. Karena $a_i > a_{n+1}$, dan dari proposisi 2 maka $\beta_i(Q) \geq \beta_{n+1}(Q) = \pi_i$ untuk sembarang barisan Q. Ini membuktikan bahwa $\beta_i \geq \pi_i$, $\forall$ $i \in J$. Sebaliknya, $\beta_i \leq \beta_i^{'}$, $\forall$ $i \in N$ - S, dari proposisi 2, $\beta_i^{'} = \pi_i$ dan karena semua koefisien adalah bilangan bulat , maka $\beta_i = \pi_i$ atau $\pi_i + 1$.

Terakhir, berdasarkan lemma 2 kita dapatkan $\beta_i(Q) = \beta_i(\bar{Q})$ dengan $\bar{Q} = \{j \in Q \setminus \beta_j + \pi_j + 1\}$. Selain itu, jelas bahwa $\beta_i(Q) = |S| - 1 - z_i$ dengan z_i adalah nilai dari solusi optimal untuk masalah knapsack K_i :

$$\max \quad \sum_{j \in S} x_j + \sum_{j \in Q} \beta_j x_j$$

$$\text{kendala} : \sum_{j \in S} a_j x_j + \sum_{j \in Q} a_j x_j \leq a_0 - a_i$$

$$x_j = 0 \text{ atau } 1\ , j \in S \cup Q.$$

Karena K_i adalah dalam bentuk yang sama dengan G_i dari lemma 2, maka nilai fungsi objektifnya tetap tidak berubah jika kolom $j \in Q$ sedemikian sehingga $\beta_j \leq \pi_j$ dibuang, atau dengan perkataan lain, jika Q diganti dengan $\bar{Q}$.

Teorema 1 : Misalkan S adalah minimal cover untuk (1) dan pandang pertidaksamaan

Jurnal Penelitian Sains : hal 44 - 59
No.14. Oktober 2003 **ISSN: 1410-7058**

$$\sum_{j\in S} x_j + \sum_{j\in N\setminus S} \alpha_j x_j \le |S| - 1 \qquad (7)$$

maka tiga buah pernyataan berikut adalah benar jika paling sedikit dua diantaranya adalah benar :

a. Pertidaksamaan $\sum_{j\in S} x_j + \sum_{j\in N\setminus S} \pi_j x_j \le |S| - 1$ adalah facet untuk P.

b. $\alpha_j = \pi_j$, $j \in N \setminus S$ dengan π_j seperti didefinisikan dalam proposisi 3.

c. $\sum_{j\in S\setminus Sh-1} a_j \le a_0 - a_i, \forall i \in N_h, h = 0,1,\ldots,q$

Bukti :

Dari proposisi 4, kondisi (b) dan (c) dari teorema di atas menghasilkan (a).

Misalkan sekarang bahwa (a) dan (c) adalah benar. Karena (7) adalah facet, maka (7) adalah pertidaksamaan yang valid untuk P, dan dari proposisi 3, $\alpha_j \le \beta_j^{'}$, $j \in N$ -S. Karena

$$\sum_{j\in S\setminus Sh-1} a_j \le a_0 - a_i, \forall i \in N_h, h = 0,1,\ldots,q$$

terpenuhi, untuk sembarang facet yang diangkat secara berurutan dalam bentuk

$$\sum_{j\in S} x_j + \sum_{j\in N-S} \beta_j x_j \le |S| - 1 \qquad (8)$$

akan kita dapatkan , berdasarkan proposisi 5 bahwa $\beta_j = \beta_j^{'} = \pi_j$, $\forall\ j \in N$-S, karena kondisi

$$\sum_{j\in S\setminus Sh-1} a_j \le a_0 - a_i, \forall i \in N_h, h = 0,1,\ldots,q$$

mengimplikasikan bahwa

$I = N$-S, $j = \varnothing$. Karena itu , (7) dan (8) adalah pertidaksamaan yang valid ,

dengan $\alpha_j \le \beta_j^{'}$, $\forall\ j \in N$-S. Maka (a) dan (c) menghasilkan (b).

Asumsikan sekarang bahwa (a) dan (b) benar, tetapi (c) salah. Karena (c) salah , berarti

$$\sum_{j\in S\setminus Sh-1} a_j \le a_0 - a_i, \forall i \in N_h, h = 0,1,\ldots,q$$

tidak terpenuhi, katakanlah untuk $i_* \in N - S$, atau $i_* \in J$ dalam notasi proposisi 5. Jika sekarang kita mencoba menghasilkan sebuah facet yang diangkat secara berurutan yang berbentuk seperti pertidaksamaan (8), dengan i_* diletakkan sebagai elemen pertama dalam barisan, maka dari proposisi 5, $\beta_{i*} = \beta_{i*}^{'} = \pi_{i*} + 1$ dan untuk semua $j \in N$ - $\cup$ { i_*}, $\beta_j \ge \pi_j$. Tetapi pertidaksamaan (8) strictly dominan terhadap pertidaksamaan (7). Hal ini kontradiksi dengan asumsi bahwa pertidaksamaan (7) adalah facet . Karena itu jika (a) dan (b) benar maka (c) harus benar. Perhatikan disini bahwa kondisi

$\sum_{j\in S\setminus Sh-1} a_j \le a_0 - a_i, \forall i \in N_h, h = 0,1,\ldots,q$

mengimplikasikan bahwa S adalah strong cover.

Teorema 2 : Misalkan S dan $\overline{S}$ adalah dua minimal cover yang berbeda sehingga $|\overline{S}| = |S|$ dan $E(S) = E(\overline{S})$. Untuk $j \in N\setminus S$, misalkan β_i' dan π_j adalah koefisien-koefisien seperti didefinisikan pada proposisi 1 dan 4, relatif terhadap S; dan untuk $j \in N\setminus \overline{S}$ misalkan $\overline{\beta}_i'$ dan $\overline{\pi}_j$ adalah koefisien yang berhubungan dengan $\overline{S}$. Selanjutnya, untuk $j \in S$ definisikan $\beta_i' = \pi_j = 1$ dan untuk $j \in \overline{S}$ definisikan $\overline{\beta}_i' = \overline{\pi}_j = 1$, maka

a. $\pi_j = \overline{\pi}_j = \overline{\beta}_i = \beta_i = 1$, $j \in S \cup (E(S) \cap \overline{S})$

b. $\pi_j + 1 = \overline{\pi}_j = \overline{\beta}_i = \beta_i = 1$, $j \in \overline{S} \setminus E(S)$

c. $\pi_j \le \overline{\pi}_j \le \overline{\beta}_i' \le \beta_i' \le \pi_j + 1$, $N \setminus S \cup \overline{S}$

Bukti :

Karena $S \subseteq E(S)$, himpunan indeks dimana (a) dinyatakan benar dapat kita partisi menjadi tiga buah himpunan bagian : $S \cup (E(S) \cap \overline{S}) = (S \cap \overline{S}) \cup (S\setminus \overline{S}) \cup [(\overline{S}\setminus S) \cap E(S)]$. Untuk $i \in S \cap \overline{S}$, maka kita dapatkan (a) dari definisi. Sekarang ambil $i \in S \setminus \overline{S}$, maka $\beta_i = \pi_j = 1$.

Nyatakan bahwa $\overline{\beta}_i = 1$. Untuk membuktikannya kita gunakan kontradiksi dengan menganggap bahwa pernyataan tersebut tidak benar. Ini berarti $\overline{\beta}_i' = 0$ atau $\overline{\beta}_i' \ge 2$. Jika $\overline{\beta}_i' = 0$ maka $\sum_{j\in S-\overline{S}_1} a_j \le a_0 - a_i$ atau dengan perkataan lain $(\overline{S} - \overline{S}_1) \cup \{i\}$ adalah bukan sebuah cover. Hal ini bertentangan dengan kenyataan bahwa $\overline{S}$ adalah cover dan $i \in E(\overline{S})$. Sebaliknya, jika $\overline{\beta}_i' \ge 2$, maka $(\overline{S} - \overline{S}_2) \cup \{i\}$ adalah sebuah cover dengan bilangan kardinal $|S|$-1. Tetapi $S \subseteq E(\overline{S})$ berarti jika $S = \{j_1, j_2, \ldots, j_s\}$ dan $\overline{S} = \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ dengan $s = |S| = |\overline{S}|$ maka $a_{jp} \ge a_{ip}$, $p = 1,2,\ldots s$, dan itu berarti $S - \{js\}$ adalah sebuah cover juga. Hal ini bertentangan dengan minimalitas dari cover S. Lebih jauh, kita nyatakan bahwa $\overline{\pi}_i = 1$, dengan perkataan lain :

$$\sum_{j\in \overline{S}_1} a_j \le a_i < \sum_{j\in \overline{S}_2} a_j \qquad (9)$$

Pertidaksamaan pertama dari (9) dipenuhi dengan fakta bahwa $i \in S \setminus \overline{S}$ berarti $a_i \geq a_j$, $\forall j \in \overline{S}$. Jika pertidaksamaan kedua salah, maka $(\overline{S} - \overline{S}_2) \cup \{i\}$ adalah sebuah cover dengan bilangan kardinal $|S|$-1. Tetapi hal ini tidak mungkin. Maka $\pi_j = \overline{\pi}_j = \overline{\beta}'_i = \beta'_i = 1$, $i \in S \cup (E(S) \cap \overline{S})$, untuk $i \in S \setminus \overline{S}$. Akhirnya, misalkan $i \in (S \setminus \overline{S}) \cap E(S)$. Maka $\overline{\pi}_j = \overline{\beta}'_i = 1$. Nyatakan $\beta'_i = 1$ atau dengan perkataan lain :

$$\sum_{j \in S - S_2} a_j \leq a_0 - a_i < \sum_{j \in S - S_1} a_j \qquad (10)$$

Karena $i \in E(S)$ maka $a_i \geq a_{j1}$ dengan a_{j1} adalah elemen pertama dari S. Sebaliknya $a_i \leq a_{j1}$, karena $i \in \overline{S}$ dan $E(S) \subset E(\overline{S})$. Maka $a_i = a_{j1}$, dan karena itu pertidaksamaan kedua dalam (10) terpenuhi karena S adalah cover , sementara pertidaksamaan pertama dalam (10) terpenuhi karena S adalah minimal. Kita juga nyatakan bahwa $\pi_j = 1$, atau

$$\sum_{j \in S_1} a_{j1} \leq a_i < \sum_{j \in S_2} a_j \qquad (11)$$

Pertidaksamaan dalam (11) terpenuhi dari kenyataan bahwa $a_i = a_{j1}$ karena $\sum_{j \in S_1} a_j = a_{j1} < \sum_{j \in S_2} a_j$. Pembuktian ini melengkapi pembuktian untuk bagian (a) dari teorema 2. Selanjutnya, untuk membuktikan (b), perhatikan bahwa untuk $i \overline{S}$, $\overline{\pi}_j = \overline{\beta}'_i = 1$ berdasarkan definisi. Nyatakan $\beta'_i = 1$, atau pertidaksamaan (5) dipenuhi untuk $i \in \overline{S} - E(S)$. Jelas bahwa $i \notin E(S)$ mengimplikasikan bahwa $a_i < a_{j1}$ dengan j_1 adalah elemen pertama dari S. Maka pertidaksamaan pertama dalam (10) dipenuhi karena S adalah minimal cover, sementara pertidaksamaan kedua dalam (10) dipenuhi karena $(\overline{S} - \overline{S}_1) \cup \{i\}$ termuat didalam $E(\overline{S})$, dan setiap himpunan dari $|S|$ elemen dari $E(\overline{S})$ adalah cover. Akhirnya, $\pi_j = 0$, karena $a_i < a_{j1}$ dan $i \notin S$. Hal ini membuktikan bagian (b) dari teorema 2. Sekarang, misalkan $i \notin N - S \cup \overline{S}$. Dari proposisi 1, $\beta'_i = h$ dan $\overline{\beta}'_i = k$, dengan h dan k adalah bilangan bulat terkecil yang memenuhi: $\sum_{j \in S - S_{h+1}} a_j \leq a_0 - a_i$ dan

$\sum_{j\in\bar{S}-\bar{S}_{k+1}} a_j \le a_0 - a_i$. Karena $E(S)\subset E(\bar{S})$ dan $a_{jp} \ge a_{ip}$, $p=$ 1,2,...,s maka $k \le h$ atau dengan perkataan lain $\bar{\beta}_i' \le \beta_i'$, $\forall\, i \in N\text{-}S\cup\bar{S}$. Sebaliknya, dari definisi, $\pi_j=h$ dan $\bar{\pi}_j=k$, dengan h dan k adalah bilangan bulat terbesar yang memenuhi $\sum_{j\in S_h} a_j \le a_i$ dan $\sum_{j\in\bar{S}_{kh}} a_j \le a_i$.

Maka $k \le h$ atau $\pi_i \le \bar{\pi}_i$, $\forall\, i \in N\text{-}S\cup\bar{S}$. Lebih jauh, dari bukti bukti yang sebelumnya kita dapatkan, $\bar{\pi}_j \le \bar{\beta}_i'$ dan $\beta_i' \le \pi_j + 1$. Hal ini membuktikan bagian (c) dari teorema 2.

III. KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan lemma-lemma, proposisi-proposisi dan teorema teorema yang telah didiskusikan, dapat kita simpulkan sebagai berikut :

- Setiap strong cover dari polytop knapsack P mendefinisikan facet.
- Facet dari polytop yang berdimensi lebih rendah dari P yang merupakan proyeksi dari P , dapat diangkat dengan prosedur pengangkatan secara berurutan untuk menghasilkan facet untuk polytop P yang berdimensi n.
- Jika diberikan minimal cover S dan facet yang diangkat secara berurutan F untuk P yang didapat dari S, maka perubahan dalam barisan yang digunakan untuk mendapatkan F hanyalah pada pergantian posisi koefisien $j \in J$ sedemikian sehingga $\beta_j = \pi_j + 1$.

DAFTAR PUSTAKA

Balas Egon, (1975). "Facets of The Knapsack Polytopes", *Journal of Mathematical Programming*, vol 8, page 146-164.

Balas Egon and Eitan Zemel, (1978)."Facets Of The Knapsack Polytope From Minimal Covers", *SIAM Journal of Applied Mathematics*, vol. 14 No.1, pp. 119- 148.

Nemhauser L. George and L.A. Wolsey, *Integer and Combinatorial Optimization* , John Wiley and Sons Inc., USA, 1988

Wolsey, A.Laurence, (1975)."Faces For A Linear Inequality In 0-1 Variables", *Journal of Mathematical Programming* , vol. 8, pp. 165 - 178.

Wamiliana and Gallagher, (1995). "Complete Characterization of Low Capacity 0-1 Knapsack Polytope", *Proceedings of The Mathematical Analysis And Statistics Conference* South East Asia Mathematical Society, Yogyakarta, pp.316 - 325.

Jurnal Penelitian Sains ; hal 44 - 59
No.14, Oktober 2003
ISSN: 1410-7058

Wamiliana, (1996). "Hubungan Antara Bentuk Facets yang Kanonik Dengan "Strong Cover" dari Polytop Knapsack, *Jurnal Sains dan Teknologi*, Universitas Lampung.