Jurnal Penelitian Sains ; hal 35 - 42
No.13. April 2003 ISSN: 1410-7058

MODEL MARKOV UNTUK MENGHITUNG DISTRIBUSI PELUANG HIDUP MULTI STATE DENGAN ASUMSI LAJU TRANSISI KONSTAN DAN SEPOTONG-SEPOTONG

Erwin
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya

ABSTRAK

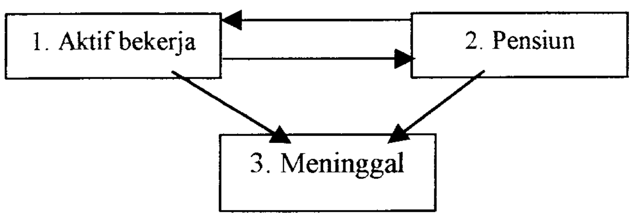
Penelitian ini membangun pendekatan umum untuk perhitungan distribusi peluang hidup dalam terapannya untuk proses multi state. Metode yang digunakan berdasarkan bentuk matriks untuk model Markov dengan waktu yang kontinu dengan asumsi laju transisi konstan. Pada kasus ini, peluang didapat tanpa memperhitungkan jumlah state. Diperoleh beberapa hasil berguna yang bertumpu pada asumsi laju transisi yang konstan atau sepotong-sepotong.

PENDAHULUAN

Model multi state banyak terjadi di berbagai bidang. Kasus yang paling sederhana hanya ada dua state yaitu hidup dan meninggal, seperti yang ditunjukkan dalam gambar 1, seseorang hanya mengalami satu kali transisi.

Gambar 1. Contoh Model Dua State

Proses multi state dapat diterapkan dalam asuransi jiwa untuk menentukan katagori tingkat resiko seperti status merokok dan kelompok tekanan darah, hal ini dilakukan oleh Toley dan Manton (1991). Program pensiun dapat juga dimodelkan dalam kerangka multi state. Dalam kasus yang sederhana, program pensiun membutuhkan state anggota yang masih aktif bekerja, pensiunan dan yang meninggal seperti yang ditunjukkan dalam gambar 2.



Gambar 2. Contoh Model Tiga State

Penelitian yang menggunakan model multi state untuk menganalisis masalah aktuaria cukup banyak. Jones (1994) menggunakan model Markov untuk perhitungan aktuaria. Pendekatan ini merupakan perluasan dari teori proses Stokastik untuk menyelesaikan masalah yang muncul dari metode-metode tradisional yang bertumpu pada pendekatan deterministik. Hoem (1972) merumuskan sejumlah hasil yang baku dari kontingensi hidup. Wolthuis dan van Hoek (1986) menghitung nilai ekspektasi dan variansi dari fungsi kerugian dalam model Markov. Tolley dan Manton (1991) mengajukan model morbiditas dan mortalitas yang terdiri dari berbagai faktor risiko dalam model multi state. Panjer (1988) dan Ramsay (1989) di dalam model mortalitasnya individu yang terinfeksi virus HIV menggunakan proses Markov dengan state menyatakan stadium infeksi. Waters (1984) membangun rumusan untuk peluang dan taksiran parameter dengan model Markov.

Bowers, dkk (1997) telah mengembangkan model distribusi peluang hidup dari 2(dua) state yaitu hidup dan meninggal. Yahdin dan Erwin(2002) membangun model distribusi peluang hidup untuk multi state dengan menggunakan model Markov.

Proses Markov

Misalkan X(t) menyatakan state seseorang pada waktu $t \geq 0$. Proses stokastik dinotasikan dengan $\{X(t),\ t \geq 0\}$. Misalkan ada sejumlah state yang dinyatakan dengan 1,2,...,k sebagai bentuk ruang state $\{1,2,\ldots,k\}$. Ross (1996) mendefinisikan, $\{X(t),\ t \geq 0\}$ sebagai proses Markov jika untuk setiap s, $t \geq 0$ dan i, j, $x(u) \in \{1, 2, \ldots, k\}$,

$$P\{X(s+t) = j \mid X(s) = i,\ X(u) = x(u),\ 0 \leq u < s\}\ t = P\{X(s+t) = j \mid X(s) = i\}$$

Sebagai proses yang akan datang (setiap waktu s) hanya bergantung pada state pada waktu s dan tidak bergantung pada state sebelum waktu s.

Konsep Dasar

Misalkan $X(t)$ menyatakan state seorang individu pada waktu $t \geq 0$. Selanjutnya dinyatakan dalam proses stokastik dengan $\{X(t), t \geq 0\}$. Diasumsikan bahwa ada sejumlah berhingga state yang dilabelkan sebagai 1, 2, ..., k; sehingga mempunyai ruang state $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Misalkan, $\{X(t), t \geq 0\}$ sebagai proses Markov jika untuk setiap $s, t \geq 0$ dan $i, j, x(u) \in \{1, 2, ..., k\}$,

$$P\{X(s+t) = j | X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < s\}$$

$$= P\{X(s+t) = j | X(s) = i\}$$

Sehingga, proses setelah waktu s hanya tergantung pada state di waktu s dan tidak bergantung pada state proses sampai waktu s.

Fungsi peluang transisi didefinisikan sebagai:

$$p_{ij}(s, s+t) \equiv P\{X(s+t) = j | X(s) = i\}, i, j \in \{1, 2, \Lambda, k\}$$

dan asumsikan bahwa

$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij}(s, s+t) = 1, \forall\, t \geq 0$$

Asumsikan juga bahwa ada limit dari

$$\mu_{ij}(t) = \lim_{h \to 0^+} \frac{p_{ij}(t, t+h) - \delta_{ij}}{h}, i.j \in \{1, 2, \Lambda, k\}$$

dengan

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & jika\ i = j \\ 0 & lainnya \end{cases}$$

Jika $i \neq j, \mu_{ij}(t)$ menyatakan laju transisi dari state i ke state j. Untuk $s, t, u \geq 0$,

$$p_{ij}(s, s+t+u) = \sum_{l=1}^{k} p_{il}(s, s+t) p_{lj}(s+t, s+t+u), i, j \in \{1, 2, \Lambda, k\} \quad (1)$$

Persamaan ini dikenal dengan Persamaan Chapman-Kolmogorov.

Laju Transisi dan Fungsi Peluang Transisi dengan menggunakan persamaan maju dan mundur Kolmogorov adalah

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}(s, s+t) = \sum_{l=1}^{k} p_{il}(s, s+t) \mu_{lj}(s+t) \quad (2)$$

dan

$$\frac{\partial}{\partial s} p_{ij}(s, s+t) = -\sum_{l=1}^{k} \mu_{il}(s) p_{lj}(s, s+t) \quad (3)$$

dengan syarat batas $p_{ij}(s, s) = \delta_{ij}$. Umumnya, sistem persamaan diferensial harus diselesaikan menggunakan pendekatan numerik.

METODOLOGI

Langkah-langkah yang akan dilakukan untuk penelitian ini :

1. Mengkaji secara teoritis model Markov dan Distribusi Peluang Hidup untuk kasus multi state.
2. Membangun rumusan model Markov untuk Laju Transisi konstan menggunakan metode matriks

Dekomposisi untuk menyatakan matriks peluang transisi.

3. Merumuskan distribusi peluang hidup sebagai kombinasi linier dari fungsi eksponensial.
4. Membangun model Markov untuk Laju transisi dengan asumsi konstan sepotong-sepotong.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model Laju Transisi Konstan

Misalkan diasumsikan bahwa $\mu_{ij}(t)=\mu_{ij}$ untuk setiap t. Proses Markov disebut sebagai Waktu Homogen atau Stasioner. Asumsi laju transisi yang konstan mengakibatkan waktu berada dalam masing-masing state akan berdistribusi eksponensial. Demikian pula, fungsi $p_{ij}(s,s+t)$ sama untuk setiap $s \geq 0$ dan cukup ditulis sebagai $p_{ij}(t)$.

Selanjutnya digunakan bentuk matriks untuk menyatakan laju transisi dan fungsi peluang transisi. Misalkan Q adalah matriks k x k dengan (i,j) elemen dari μ_{ij} dan $P(t)$ adalah matriks k x k dengan (i,j) elemen dari $p_{ij}(t)$. Penurunan persamaan (1), menghasilkan persamaan Chapman-Kolmogorov sbb.

$$P(t+u) = P(t)P(u) \tag{4}$$

Demikian juga berdasarkan persamaan (2) dan (3), persamaan diferensial Kolmogorov diperoleh:

$$P'(t) = P(t)Q \tag{5}$$

dan

$$P'(t) = QP(t) \tag{6}$$

dengan syarat batas $P(0)=I$. Persamaan (5) dan (6) mempunyai solusi

$$P(t) = e^{Qt}$$
$$= 1 + Qt + \frac{Q^2t^2}{2!} + \Lambda$$

Hasil ini terbatas karena barisannya mempunyai konvergensi yang lambat. Jika Q mempunyai nilai-nilai eigen, $d_1, d_2, \ldots, d_k$, maka $Q=ADC$ dengan $C=A^{-1}$, $D=diag(d_1, d_2, \ldots, d_k)$ dan kolom ke-i dari matriks A merupakan vektor eigen kanan yang bersesuaian dengan d_i. Sehingga menggunakan nilai-nilai eigen diperoleh :

$$P(t) = A\, diag(e^{d_1 t}, \Lambda, e^{d_k t})C \tag{7}$$

Selanjutnya, akan diilustrasikan penerapannya dalam kasus model multi state dari gambar 2 yang merupakan kasus tiga state, diperoleh :

$$Q=\begin{bmatrix} -(\mu_{12}+\mu_{13}) & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & -(\mu_{21}+\mu_{23}) & \mu_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nilai-nilai eigen dari matriks Q adalah solusi dari

$$d\left[d^2+(\mu_{12}+\mu_{13}+\mu_{21}+\mu_{23})d+\mu_{12}\mu_{23}+\mu_{13}\mu_{21}+\mu_{13}\mu_{23}\right]=0$$

Persamaan (7), dapat ditulis sebagai:

$$p_{ij}(t)=\sum_{n=1}^{k} a_{in}c_{nj}e^{d_n t} \qquad (8)$$

Dalam gambar 1, kasus dua state, diperoleh matriks:

$$Q=\begin{bmatrix} -\mu_{12} & \mu_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga $d_1=-\mu_{12}$ dan $d_2=0$. Vektor-vektor eigennya adalah $(1, 0)'$ dan $(1, 1)'$. Sehingga

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dan

$$C=A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan (7), diperoleh:

$$\begin{aligned} P(t) &= A\, diag(e^{d_1 t}, e^{d_2 t})C \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-\mu_{12}t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-\mu_{12}t} & 1-e^{-\mu_{12}t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sehingga,

$p_{11}(t)=e^{-\mu_{12}t}, p_{12}(t)=1-e^{-\mu_{12}t}, p_{22}(t)=1$

dan $p_{21}(t)=0$.

Model Laju Transisi Konstan Sepotong-sepotong

Selanjutnya, Asumsi di atas yang menyatakan bahwa laju transisi konstan akan dibatasi waktunya sehingga asumsi yang akan dipakai adalah laju transisi konstan sepotong-sepotong.

Misalkan $\mu_{ij}(t)=\mu_{ij}^{(m)}$ jika $t \in [\, t_{m-1}, t_m)$, untuk $m=1, 2, \ldots$, dengan $t_0=0$. Selanjutnya dimisalkan pula $p_{ij}^{(m)}(t)$ menyatakan fungsi peluang transisi pada interval waktu $[u, u+t)$ yang berada dalam interval $[t_{m-1}, t_m)$. Dalam bentuk matriks, dinyatakan $Q^{(m)}$ dan $P^{(m)}(t)$. Definisikan m_t sebagai bilangan bulat sedemikian hingga $t_{m_t-1} \le t < t_{m_t}$ dan dari persamaan (4), diperoleh

$$P(s,t)=P^{(m_s)}(t_{m_s}-s)P^{(m_s+1)}(t_{m_s+1}-t_{m_s})\Lambda P^{(m_t)}(t-t_{m_t-1}) \tag{9}$$

Sehingga, matriks peluang transisi dapat dihitung bila diberikan s dan t. Langkah pertama adalah menentukan $A^{(m)}$, $D^{(m)}$, dan $C^{(m)}=(A^{(m)})^{-1}$ dari $Q^{(m)}$ untuk setiap m, selanjutnya hitung $P^{(m)}(t)$ menggunakan persamaan (7). Akhirnya dicari $P(s, t)$ menggunakan persamaan (9).

Sebagai ilustrasi, sebuah proses Markov dengan asumsi laju transisi konstan dalam masing-masing usia (tahun). Misalkan $\mu_{ij}^{(x)}$ adalah laju transisi dari state i ke state j untuk seseorang individu berusia antara x dengan $x+1$, dengan x adalah bilangan bulat non negatif dan $i, j \in \{1, 2, ..., k\}$. Laju transisi dapat digunakan untuk membentuk matriks $Q^{(x)}$, dari sini dapat ditentukan $A^{(x)}$, $C^{(x)}$ dan $D^{(x)}$. Misalkan $p_{ij}^{(x)}$ menyatakan fungsi peluang transisi dari i ke j yang bersesuaian dengan interval usia dari x ke $x+1$. Misalkan akan ditentukan rata-rata waktu tinggal di state j antara usia 30 dan 40 tahun dari seorang individu yang berada di state i pada usia 30. Pernyataan ini dapat dimodelkan dengan :

$$\int_{30}^{40} p_{ij}(30,t)dt = \sum_{x=30}^{39}\int_{x}^{x+1} p_{ij}(30,t)dt$$

$$= \sum_{x=30}^{39}\int_{x}^{x+1}\sum_{h=1}^{k} p_{ih}(30,x)p_{hj}^{(x)}(t-x)dt$$

dari persamaan (1)

$$= \sum_{x=30}^{39}\sum_{h=1}^{k} p_{ih}(30,x)\int_{x}^{x+1}\sum_{n=1}^{k} a_{hn}^{(x)}c_{nj}^{(x)}e^{d_n^{(x)}(t-x)}dt$$

dari persamaan (8)

$$= \sum_{x=30}^{39}\sum_{h=1}^{k} p_{ih}(30,x)\sum_{n=1}^{k} a_{hn}^{(x)}c_{nj}^{(x)}\int_{x}^{x+1} e^{d_n^{(x)}(t-x)}dt$$

$$= \sum_{x=30}^{39}\sum_{h=1}^{k} p_{ih}(30,x)\sum_{n=1}^{k} a_{hn}^{(x)}c_{nj}^{(x)}\frac{e^{d_n^{(x)}}-1}{d_n^{(x)}} \tag{10}$$

dengan $p_{ih}(30, x)$ adalah elemen (i, h) dari

$$P(30,x)=\prod_{y=30}^{x-1} P^{(y)}(1)$$

$$=\prod_{y=30}^{x-1} A^{(y)}diag(e^{d_1^{(y)}},\Lambda,e^{d_k^{(y)}})C^{(y)}$$

$a_{hn}^{(x)}$ adalah elemen (h, n) dari matriks $A^{(x)}$; $c_{nj}^{(x)}$ adalah elemen (n, j) dari matriks $C^{(x)}$; dan $d_n^{(x)}$ adalah elemen (n, n) dari matriks $D^{(x)}$. Bentuk matriks persamaan (10) dapat ditulis sebagai:

$$P(30,t)dt = \int_{30}^{40} \sum_{x=30}^{39} P(30,x)A^{(x)} diag\left(\frac{e^{d_1^{(x)}}-1}{d_1^{(x)}}, \Lambda ,\frac{e^{d_k^{(x)}}-1}{d_k^{(x)}}\right)C^{(x)}$$

.

KESIMPULAN

Kesimpulan dari penelitian ini adalah:

1. Dengan menggunakan asumsi laju transisi konstan didapat sistem persamaan diferensial Kolmogorov $P^{'}(t) = P(t)Q$ dan $P^{'}(t) = QP(t)$ degan syarat batas $P(0)=I$. Sistem persamaan ini mempunyai solusi

   $$P(t) = e^{Qt}$$
   $$= 1 + Qt + \frac{Q^2t^2}{2!} + \Lambda$$

   Barisannya mempunyai konvergensi yang lambat. Jika Q mempunyai nilai-nilai eigen, $d_1, d_2, \ldots, d_k$, maka $Q=ADC$ dengan $C=A^{-1}$, $D=diag(d_1, d_2, \ldots, d_k)$ dan kolom ke-i dari matriks A merupakan vektor eigen kanan yang bersesuaian dengan d_i. Sehingga menggunakan nilai-nilai eigen diperoleh :

   $$P(t) = A\, diag(e^{d_1 t}, \Lambda , e^{d_k t})C$$

2. Model Multi State untuk asumsi laju transisi konstan sepotong-sepotong yaitu,

   $\mu_{ij}(t)=\mu_{ij}^{(m)}$ jika $t \in [\, t_{m-1}, t_m)$, untuk $m=1, 2, \ldots,$ dengan $t_0=0$ diperoleh

   $$P(s,t)=P^{(m_s)}(t_{m_s}-s)P^{(m_s+1)}(t_{m_s+1}-t_{m_s})\Lambda P^{(m_t)}(t-t_{m_t-1})$$

DAFTAR PUSTAKA

Bowers. et.al; 1997, *Actuarial Mathematics*, second edition, Schaumburg Illinois: The Society of Actuaries

Hoem, J.M, 1972, *In Homogeneous Semi-Markov Processes, Select Actuarial Tables and Duration Dependence in Demography*, In Population Dynamics, (T.N.E. Graville), New York: Academic Press.

Jones, B.L 1994, Actuarial Calculations Using Model Markov, *Transactions of Society of Actuaries*, Vol. 46:277-250.

Panjer,H.H, 1988, AIDS: Survival Analysis of Person Testing HIV+, *Transaction ofActuaries*, Vol. 40 517-547.

Ramsay, C.M, 1989; AIDS and the Calculation of Life Insurance Functions, *TSA XLI*: 393 – 442

Ross, S. M, 1996, *Stochastic Processes*, second edition, Berkeley

Tolley, H.D and Manton, K.G, Intervention Effects among a Collection of Risks, *TSA XLIII*:117-159.

Waters, H.R, 1984, An Approach to The Study of Multiple State Models, *Journal of The Institute of Actuaris* III, 363-74.

Wolthuis and van Hoek, 1986, Stochastic Models for Life Contingencies, *Insurance: Mathematics and Economics* : 217-54

Yahdin, S dan Erwin, 2002, *Model Markov Untuk Menghitung Distribusi Peluang Hidup Multi State*, Laporan Penelitian Dana Diks Universitas Sriwijaya, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam