Jurnal Penelitian Sains ; hal 68 - 74
No.11. April 2002 ISSN: 1410-7058

KAJIAN PROGRAM LINIER FUZZY

Samsuryadi
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya

ABSTRAK

Kajian ini membahas beberapa bentuk Program Linier Fuzzy dengan sumber fuzzy atau kendala fuzzy atau fungsi tujuan fuzzy menggunakan fungsi keanggotaan triangular atau segitiga, selanjutnya hasil diubah ke bentuk Program Linier Konvensional atau Biasa. Solusinya dapat diperoleh dengan metode seperti yang digunakan dalam Program Linier Biasa. Dan diakhiri dengan satu ilustrasi secara numerik dari salah satu bentuk Program Linier Fuzzy yang dibahas.

Kata kunci: Program Linier Fuzzy, sumber *fuzzv*, kendala *fuzzy*, fungsi tujuan *fuzzy* dan fungsi keanggotaan segitiga.

1. PENDAHULUAN

Semenjak Bellman dan Zadeh mengusulkan konsep keputusan *fuzzy*, riset pada program matematika *fuzzy* telah banyak dilakukan, seperti oleh Zimmerman (1976), Luhandjula (1989), Lai (1992), Li (1994), dan Tang (1997). Berdasarkan definisi Bellman dan Zadeh, suatu keputusan *fuzzy* adalah pertemuan tujuan dan kendala *fuzzy* yang didefinisikan oleh suatu operator *max-min*. Berdasarkan definisi ini, Zimmerman mengembangkan pendekatan toleransi (*tolerance approach*) untuk model simetris Program Linier Fuzzy. Hasil ini merupakan metode praktis pertama untuk menyelesaikan program linier mempunyai tujuan dan kendala *fuzzy*. Model ini potensial digunakan pada masalah aktual seperti perencanaan produksi, alokasi sumber daya, dan lain sebagainya.

Berdasarkan pertimbangan ini, maka perlu dikaji beberapa bentuk Program Linier Fuzzy, dengan fungsi keanggotaan segitiga. Metode yang digunakan untuk menentukan solusinya dengan cara mengubah Program Linier Fuzzy ke bentuk Program Linier Biasa.

2. METODOLOGI

Langkah yang ditempuh dalam pembahasan ini sebagai berikut:

2.1 menurunkan proses pembentukan Program Linier Fuzzy dengan sumber *fuzzy* atau kendala *fuzzy* atau tujuan *fuzzy*,

2.2 menggunakan fungsi keanggotaan segitiga,

2.3 mengubah ke bentuk Program Linier Biasa,

2.4 menyelesaikan satu ilustrasi secara numerik.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Klasifikasi Program Linier Fuzzy

Program linier adalah mekanisme alamiah untuk merumuskan masalah kenyataan hidup. Populeritas program linier dikarenakan oleh dua alasan, yaitu: (i) banyak masalah praktis dapat dirumuskan sebagai masalah program linier, dan (ii) terdapat metode efisien (misalnya metode simpleks) untuk menyelesaikan masalah program linier. Masalah Program Linier Biasa menentukan nilai peubah yang tidak diketahui, agar diperoleh fungsi tujuan linier maksimum atas kendala yang berbentuk ketidaksamaan atau kesamaan linier. Bentuk Program Linier Standar adalah

$$\begin{array}{ll} \text{Maksimum} & cx \\ \text{Kendala} & Ax \le b,\ x \ge 0 \qquad (1) \end{array}$$

Dengan $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in R^n$ adalah peubah keputusan yang akan ditentukan, $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ adalah koefisien fungsi tujuan, dan $A = [a_{ij}] \in R^{m\times n}$ adalah matriks kendala dengan elemennya a_{ij} dinamakan koefisien kendala, dan $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ adalah batasan sumber (*resource*).

Menurut Wang (1997) Program Linier Fuzzy dibagi dalam tiga bentuk, yaitu:

(i) Program linier dengan sumber *fuzzy*

$$\begin{array}{ll} \text{Maksimum} & cx \\ \text{Kendala} & Ax \overset{\sim}{\le} b,\ x \ge 0 \quad (2) \end{array}$$

dengan ketidaksamaan *fuzzy* $\overset{\sim}{\le}$ disifatkan oleh fungsi keanggotaan segitiga.

(ii) Program linier dengan koefisien fungsi tujuan *fuzzy*

$$\begin{array}{ll} \text{Maksimum} & \tilde{c}x \\ \text{Kendala} & Ax \le b,\ x \ge 0 \quad (3) \end{array}$$

dengan $\tilde{c} = (\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_n)$ adalah vektor bilangan *fuzzy*.

(iii) Program linier dengan koefisien kendala *fuzzy*

Maksimum cx

Kendala $\tilde{A}x \le b$, $x \ge 0$ (4)

dengan $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$ adalah suatu matriks yang memuat bilangan *fuzzy*.

3.2 Program Linier dengan Sumber Fuzzy

Berdasarkan masalah program linier dengan sumber *fuzzy* Persamaan (2), andaikan t_i (> 0) sebagai toleransi sumber b_i, kemudian ketidaksamaan $(Ax)_i \tilde{\le} b_i$ dinyatakan sebagai $(Ax)_i \le b_i + \theta t_i$, dengan $\theta \in [0,1]$. Dengan kata lain, kendala *fuzzy* $(Ax)_i \tilde{\le} b_i$ didefinisikan sebagai suatu himpunan *fuzzy* dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & ; (Ax)_i < b_i \\ 1 - ((Ax)_i - b_i)/t_I & ; b_i \le (Ax)_i \le b_i + t_i \\ 0 & ; (Ax)i > b_i + t_i \end{cases} \quad (5)$$

masalahnya adalah bagaimana menentukan nilai **x**, sehingga cx dan $\mu_i(x)$ untuk i = 1,2,…,m adalah maksimum.

Werners (1987) mengusulkan metode berikut untuk menyelesaikan masalah ini. Pertama, selesaikan dua masalah Program Linier Standar :

Maksimum cx

Kendala $(Ax)_i \le b_i$, $i = 1,2,\ldots,m$ (6)

$x \ge 0$

Maksimum cx

Kendala $(Ax)_i \le b_i + t_i$, $i = 1,2,\ldots,m$ (7)

$x \ge 0$

Misalkan x^0 dan x^1 adalah penyelesaian (6) dan (7), sehingga diperoleh $z^0 = cx^0$ dan $z^1 = cx^1$. Selanjutnya, fungsi keanggotaan berikut ini adalah untuk menentukan derajat optimalitas

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1 & ; cx > z^1 \\ 1 - \dfrac{z^1 - cx}{z^1 - z^0} & ; z^0 \le cx \le z^1 \\ 0 & ; cx < z^0 \end{cases} \quad (8)$$

Jika $cx \ge z^1$, maka $\mu_0(x) = 1$, memberikan derajat optimalitas maksimum, jika $cx \ge z^0$ maka $\mu_0(x) = 0$, memberikan derajat optimalitas minimum, dan jika cx terletak antara z^1 dan z^0 derajat optimalitas berubah dari 1 ke 0.

Karena kendala dan fungsi tujuan dinyatakan oleh fungsi keanggotaan (5) dan (8), dengan menggunakan metode *max-min* untuk menyelesaikan masalah optimasi fungsi tujuan ganda ini. Secara khusus, masalah menjadi:

$$\text{Max-min } [\mu_0(x), \mu_1(x), \ldots, \mu_n(x)] \quad (9)$$
$$x \geq 0$$

atau ekivalen dengan

$$\begin{aligned} &\text{Maksimum } \alpha \\ &\text{Kendala} \quad \mu_0(x) \geq \alpha \quad (10) \\ &\mu_i(x) \geq \alpha,\ i = 1,2,\ldots,m \\ &\alpha \in [0,1],\ x \geq 0. \end{aligned}$$

Substitusikan (5) dan (8) ke dalam (10), hasilnya disimpulkan bahwa masalah program linier sumber *fuzzy* (2) dapat diselesaikan dengan masalah Program Linier Standar berikut:

maksimum α

$$\begin{aligned} &\text{kendala} \quad cx \geq z^1 - (1-\alpha)(z^1 - z^0) \\ &(Ax)_i \leq b_i + (1-\alpha)t_i,\ i = 1,2,\ldots,m \\ &\alpha \in [0,1],\ x \geq 0. \quad (11) \end{aligned}$$

3.3 Program Linier dengan Koefisien Tujuan Fuzzy

Asumsikan $\tilde{c}_i$ adalah bilangan *fuzzy* segitiga dengan fungsi keanggotaan μ_c(x; c_i^-, c_i^0, c_i^+). Dengan simbol, misalkan $\tilde{c}_i$ = (c_i^-, c_i^0, c_i^+), maka Persamaan (3) menjadi

$$\begin{aligned} &\text{Maksimum } (c^-x, c^0x, c^+x) \\ &\text{Kendala} \quad Ax \leq b,\ x \geq 0. \quad (12) \end{aligned}$$

Dengan $c^- = (c_1^-, c_2^-, \ldots, c_n^-)$, $c^0 = (c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0)$, dan $c^+ = (c_1^+, c_2^+, \ldots, c_n^+)$ yang merupakan masalah program linier tujuan ganda.

Lai dan Hwang (1992) mengusulkan 2 pendekatan. Pendekatan pertama adalah menggabungkan tiga fungsi tujuan menjadi satu fungsi tujuan. Sebagai contoh: c^-x, c^0x, c^+x digabungkan dengan kriteria berikut, sehingga (12) dikonversikan ke bentuk masalah Program Linier Standar berikut:

$$\begin{aligned} &\text{Maksimum} \quad \frac{4c^0 + c^- + c^+}{6}x \quad (13) \\ &\text{Kendala} \quad Ax \leq b,\ x \geq 0. \end{aligned}$$

Pendekatan kedua dimulai melalui pengamatan dengan tujuan adalah memaksimumkan bilangan *fuzzy* segitiga (c^-x, c^0x, c^+x). Oleh karena itu, mengganti memaksimumkan tiga nilai c^-x, c^0x, c^+x, secara simultan, yaitu maksimumkan c^0x (pusat), minimumkan $c^0x - c^-x$ (bagian kiri) dan maksimumkan $c^+x - c^0x$ (bagian kanan). Dalam cara ini, fungsi keanggotaan segitiga di dorong ke bagian kanan. Sehingga, Masalah (12) diubah ke masalah program linier tujuan *multiple* lainnya, sebagai berikut:

$$\begin{array}{lll} \text{Minimum} & z_1 = c^0x - c^-x & \\ \text{Maksimum} & z_2 = c^0x & (14) \\ \text{Maksimum} & z_3 = c^+x - c^0x & \\ \text{Kendala} & Ax \le b,\ x \ge 0. & \end{array}$$

Untuk menyelesaikan masalah ini dengan cara mengkarakteristikan 3 fungsi tujuan dengan fungsi keanggotaan dan kemudian maksimumkan α-cutnya. Secara khusus, diperoleh solusi:

$$Z_1^P = \min_{x \in X} (c^0 - c^-)x,\quad Z_1^N = \underset{x \in X}{maks}(c^0 - c^-)x$$

$$Z_2^P = \underset{x \in X}{maks}\ c^0x,\quad Z_2^N = \min_{x \in X} c^0x \qquad (15)$$

$$Z_3^P = \underset{x \in X}{maks}(c^+ - c^0)x,\quad Z_1^N = \min_{x \in X}(c^+ - c^0)x$$

dengan $X = \{x \mid Ax \le b,\ x \ge 0\}$.

Solusi Z_i^P dinamakan solusi ideal positif dan Z_i^N dinamakan solusi ideal negatif. Selanjutnya, didefinisikan 3 fungsi keanggotaan berikut untuk mengkarakteristik 3 tujuan:

$$\mu_{z1}(x) = \begin{cases} 1 & ;\ c^0x - c^-x < z_1^P \\ \dfrac{z_1^N - (c^0x - c^-x)}{z_1^N - z_1^P} & ;\ z^0 \le cx \le z^1 \\ 0 & ;\ c^0x - c^-x > z_1^N \end{cases}$$

$$\mu_{z2}(x) = \begin{cases} 1 & ;\ c^0x > z_2^P \\ \dfrac{c^0x - z_2^N}{z_2^P - z_2^N} & ;\ z_2^N \le c^0x \le z_2^P \ (16) \\ 0 & ;\ c^0x < z_2^N \end{cases}$$

$$\mu_{z3}(x) = \begin{cases} 1 & ;\ c^+x - c^0x > z_3^P \\ \dfrac{(c^+x - c^0x) - z_2^N}{z_2^P - z_2^N} & ;\ z_3^N \le c^+x - c^0x \le z_3^P \\ 0 & ;\ c^+x - c^0x < z_3^N \end{cases}$$

Akhirnya, masalah diselesaikan dengan masalah Program Linier Standar.

$$\begin{array}{ll} \text{Maksimum} & \alpha \\ \text{kendala} & \mu_{zi}(x) \ge \alpha,\ i = 1,2,3. \quad (17) \\ & Ax \le b,\ x \ge 0. \end{array}$$

3.4 Program linier dengan Koefisien Kendala Fuzzy

Asumsikan $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$ berisi bilangan *fuzzy* segitiga, sehingga $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij}^-, a_{ij}^0, a_{ij}^+)$ dan $\tilde{A} = [A^-, A^0, A^+]$ dengan $A^- = [a_{ij}^-]$, $A^0 = [a_{ij}^0]$ dan $A^+ = [a_{ij}^+]$. Maka masalah menjadi

$$\begin{array}{ll} \text{Maksimum} & cx \\ \text{Kendala} & (A^-x,\ A^0x,\ A^+x) \le b \quad (18) \\ & x \ge 0. \end{array}$$

Gunakan kriteria paling sesuai dengan (13), konversikan (18) ke dalam masalah Program Linier Standar berikut:

Maksimum cx

Kendala $\dfrac{4A^0 + A^- + A}{6} x \leq b$ (19)

$x \geq 0.$

Bentuk-bentuk lain dari 3 masalah dasar Program Linier Fuzzy di atas dapat dikombinasikan dan penyelesaiannya dengan cara pendekatan yang serupa di atas. Sebagai contoh, andaikan masalah dengan setiap koefisien adalah bilangan *fuzzy*

Maksimum $\tilde{c}x$

Kendala $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$, $x \geq 0.$ (20)

Asumsikan bahwa $\tilde{c}$, $\tilde{A}$ dan $\tilde{b}$ terdiri dari bilangan *fuzzy* segitiga, dengan $\tilde{c} = (c^-, c^0, c^+)$, $\tilde{A} = (A^-, A^0, A^+)$ dan $\tilde{b} = (b^-, b^0, b^+)$, maka (20) dapat dikonversikan ke dalam masalah program linier tujuan *multiple* berikut ini.

Minimum $z_1 = c^0x - c^-x$
Maksimum $z_2 = c^0x$ (21)
Maksimum $z_3 = c^+x - c^0x$
Kendala $A^-x \leq b^-$, $A^0x \leq b^0$, $A^+x \leq b^+$
$x \geq 0.$

Gunakan cara seperti Persamaan (14) untuk menyelesaikan masalah ini.

4. ILUSTRASI NUMERIK DAN HASILNYA

Andaikan masalah seleksi campuran produk berikut (Lai dan Hwang (1992)).

Maksimum $4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$
(keuntungan)

Kendala $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \tilde{\leq} 15$
(man-weeks)
$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \tilde{\leq} 80$
(material Y) (22)
$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \tilde{\leq} 100$
(material Z)
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$

Dengan toleransi untuk man-weeks, material Y dan Z adalah $t_1 = 5$, $t_2 = 40$, dan $t_3 = 30$. Penyelesaian dengan cara model (6) dan (7) di atas, diperoleh $z^0 = 99.29$ dan $z^1 = 130$. Dari bentuk (11) diperoleh umusan berikut.

Minimumkan θ
Kendala
$4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \geq 130 - 30.71\,\theta$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15 + 5\,\theta$
$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 80 + 40\,\theta$ (23)
$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100 + 30\,\theta$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0,\ \theta \in [0,1].$

Dengan $\theta = 1 - \alpha$. Diperoleh solusi $z^* = 114.65$ pada $\theta = 0.5$.

5. KESIMPULAN

Program Linier Fuzzy lebih bervariasi dan fleksibel dibandingkan dari Program Linier Biasa dalam menangkap fenomena alam atau kenyataan hidup sehari-hari. Program Linier Fuzzy ini juga dapat diubah ke bentuk Program Linier Biasa, sehingga lebih mudah dalam proses penentuan solusinya.

DAFTAR PUSTAKA

Gen, Mitsuo dan Runwei Cheng. 2000. Genetic Algorithms and Engineering Optimization. John Wiley & Sons, Inc. New York.

Lai, Y.J. dan C.L. Hwang. 1992. Fuzzy Mathematical Programming. Springer-Verlag. New York.

Wang, Li-Xin. 1997. A Course in Fuzzy Systems and Control. Prentice-Hall International, Inc. London.

Werner, B. 1987. An Interactive Fuzzy Programming systems. Fuzzy Set and Systems, 23 halaman 131-147.

Zimmerman, H.J. 1976. Description and Optimization of Fuzzy Systems. International Journal of General Systems 2: 209-215.