Jurnal Penelitian Sains ; hal 75 - 81
No.11. April 2002 ISSN: 1410-7058

ANALISIS SISTEM LINEAR SINGULAR (E,A,B,C)

Kris Suryowati
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya

ABSTRAK

Dalam penelitian ini bertujuan untuk manganilis sistem linear singular (E,A,B,C) yang berbentuk :

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

yang berkaitan dengan syarat perlu dan syarat cukup keberadaan dan ketunggalan solusinya, jika matriks pencil (sE-A) regular. Dengan demikian sistem dapat dibawa ke dalam bentuk dekomposisi standar yang terdiri dari dua subsistem yaitu subsistem pertama (yang disebut subsistem lambat) dan subsistem kedua (yang disebut subsistem cepat). Selanjutnya solusi sistem dapat ditentukan melalui sistem dekomposisi standar yang terbentuk.

PENDAHULUAN

Diberikan sistem linear singular sebagai berikut :

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \qquad (1)$$

dengan $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$ dan $y(t) \in R^r$ berturut-turut merupakan vektor keadaan, vektor masukan dan vektor keluaran. Sedangkan E, $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$ dan $C \in R^{r\times n}$ merupakan matriks–matriks konstan dengan elemen-elemen atas lapangan R, dengan rank E = q < n. Untuk lebih menyingkat penulisan persamaan (1) selanjutnya ditulis dengan notasi sistem (E,A,B,C).

Sistem (E,A,B,C) disebut juga sistem deskriptor linear. Sistem ini sering dijumpai dalam masalah aplikasi Matematika seperti pada rangkaian RLC dan juga dalam ekonomi.

Pada sistem (E,A,B,C) jika matriks E nonsingular atau matriks identitas maka akan menjadi sistem normal. Hal yang menarik adalah jika matriks E singular maka sistem tersebut belum tentu punya solusi dan untuk menyelesaikannya juga tidak mudah. Adapun yang menjadi permasalahan disini adalah bagaimana bentuk solusi dan keluaran sistemnya.

TINJAUAN PUSTAKA

Sistem persamaan (1) adalah sistem linear singular sebab det E = 0 atau rankE = q < n dari Dai, 1988. Jika detE $\neq 0$ maka disebut sistem linear non singular atau disebut sistem normal. Olsder,1994 dan Skelton, 1988 diantaranya membahas mengenai sistem linear dan karakterisasinya.

Pada Hoskins, 1979 diantaranya dibahas transformasi Laplace suatu fungsi dan sifat-sifatnya. Mengenai perhitungan matriks dan sifat-sifatnya diambil dari Cullen, 1966. Pengertian matriks pencil regular pada Gantmacher, 1960.

PEMBAHASAN

Dengan menerapkan transformasi Laplace pada kedua ruas persamaan (1) diperoleh:

$L\{E\dot{x}(t)\} = L\{A\,x(t) + B\,u(t)\}$

$EL\{\dot{x}(t)\} = AL\{x(t)\} + BL\{u(t)\}$

$(sE - A)\mathbf{X}(s) = Ex(0) + BU(s)$ …… (2)

Jika terdapat $s \in \mathbb{C}$ (lapangan bilangan kompleks) sehingga matriks (sE – A) nonsingular, maka diperoleh:

$\mathbf{X}(s) = (sE - A)^{-1}Ex(0) + (sE - A)^{-1}BU(s)$ (3)

Kemudian dengan menerapkan invers transformasi Laplace pada kedua ruas persamaan (3) diperoleh:

$x(t) = L^{-1}\{(sE - A)^{-1}Ex(0)\} + L^{-1}\{(sE - A)^{-1}BU(s)\}$ ……………………………. (4)

Pada persamaan (4) ternyata muncul kesulitan untuk menyelesaikannya karena terdapat bentuk matriks $(sE - A)^{-1}E$ dan $(sE - A)^{-1}B$ berukuran nxn atas lapangan R yang tidak mudah diselesaikan untuk menentukan invers transformasi Laplace.

Dengan demikian diasumsikan terdapat $s \in \mathbb{C}$ sehingga matriks (sE–A) nonsingular, yaitu det(sE–A) $\neq$ 0 sebab jika tidak maka sistem tidak punya solusi.

Berikut diberikan definisi matriks pencil regular yang diambil dari Gantmacher, 1960.

Definisi 1

Diberikan matriks A, $E \in R^{nxn}$, matriks pencil (sE–A) disebut regular jika terdapat skalar $s \in \mathbb{C}$ *yang memenuhi* $|sE - A| \neq 0$.

Dengan kata lain, matriks *pencil (sE–A)* dikatakan regular jika polinomial $|sE - A| \not\equiv 0$.

Jurnal Penelitian Sains ; hal 75 - 81
No.11. April 2002 **ISSN: 1410-7058**

Lemma berikut menunjukkan karakteristik dari matriks pencil regular.

Lemma 2

Matriks pencil sE–A regular jika dan hanya jika terdapat matriks nonsingular P, $Q \in R^{nxn}$ *yang memenuhi* $QEP = diag\left(I_{n_1}, N\right)$ *dan* $QAP = diag\left(A_1, I_{n_2}\right)$ *dengan* $n_1+n_2= n$, $A_1 \in R^{n_1 \, x \, n_1}$ *dan* $N \in R^{n_2 x n_2}$ *nilpoten berindeks h.*

Bukti:

($\Rightarrow$) Diketahui matriks pencil sE–A regular, akan dibuktikan terdapat matriks nonsingular P, $Q \in R^{nxn}$ yang memenuhi QEP $= \text{diag}\left(I_{n_1}, N\right)$ dan $\text{QAP}=\text{diag}\left(A_1, I_{n_2}\right)$ dengan $n_1 + n_2 = n$, $A_1 \in R^{n_1 \, x \, n_1}$ dan $N \in R^{n_2 x n_2}$ nilpoten berindeks h.

Dengan Definisi 1 dipilih $\alpha \in \mathbb{C}$ yang memenuhi $\det(\alpha E - A) \neq 0$.

Kemudian ambil matriks $\hat{E} = (\alpha E - A)^{-1}E$, sehingga $\hat{A} = (\alpha E - A)^{-1}A = -I + \alpha \hat{E}$.

Disisi lain, matriks $\hat{E}$ similar ke matriks kanonik Jordan yaitu terdapat matriks nonsingular $T \in R^{nxn}$ yang memenuhi $T\hat{E}T^{-1} = \text{diag}(\hat{E}_1, \hat{E}_2)$ dengan matriks $\hat{E}_1 \in R^{n_1 \, x \, n_1}$ nonsingular dan $\hat{E}_2 \in R^{n_2 x n_2}$ nilpoten berindeks h.

$T\hat{E}T^{-1} = \text{diag}(\hat{E}_1, \hat{E}_2) =$

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \ddots & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & J_k & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & J_{k+1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & J_r \end{bmatrix}$$

dengan J_i, $i = 1,2,\ldots,k, k+1, \ldots,r$ matriks blok Jordan.

Matriks $\hat{E}_2 \in R^{n_2 x n_2}$ nilpoten berindeks h sehingga $I_{n_2} \pm \alpha\hat{E}_2$ nonsingular.

Ambil $Q = \text{diag}(\hat{E}_1^{-1}, (-I_{n_2} + \alpha\hat{E}_2)^{-1})T(\alpha E - A)^{-1}$ dan $P = T^{-1}$, akan diperoleh

$QEP = \text{diag}(\hat{E}_1^{-1}, (-I_{n_2} + \alpha\hat{E}_2)^{-1})T(\alpha E - A)^{-1} E T^{-1}$

$QEP = \text{diag}(\hat{E}_1^{-1}, (-I_{n_2} + \alpha\hat{E}_2)^{-1})T\hat{E}T^{-1}$

$QEP = \text{diag}(\hat{E}_1^{-1}, (-I_{n_2} + \alpha\hat{E}_2)^{-1})\ \text{diag}(\hat{E}_1, \hat{E}_2) = \text{diag}(I_{n_1}, (-I_{n_2} + \alpha\hat{E}_2)^{-1}\hat{E}_2)$

Mensubstitusi $N = (-I_{n_2} + \alpha\hat{E}_2)^{-1}\hat{E}_2$, $\hat{E}_2$ nilpoten berindeks h, sehingga

$N=(-I_{n_2}+\alpha\hat{E}_2)^{-1}\hat{E}_2$

$=-\hat{E}_2-\alpha\hat{E}_2^2-\alpha^2\hat{E}_2^3-\alpha^3\hat{E}_2^4-\cdots-\alpha^{h-2}\hat{E}_2^{h-1}$

Jadi QEP = diag(I_{n_1}, N) , N nilpoten berindeks h

QAP = diag($\hat{E}_1^{-1},(-I_{n_2}+\alpha\hat{E}_2)^{-1}$)T ($\alpha$E – A)$^{-1}$A T^{-1}

QAP = diag($\hat{E}_1^{-1},(-I_{n_2}+\alpha\hat{E}_2)^{-1}$)T(-I + $\alpha\hat{E}$)T^{-1}

QAP = diag($\hat{E}_1^{-1},(-I_{n_2}+\alpha\hat{E}_2)^{-1}$) (-I + α diag($\hat{E}_1$, $\hat{E}_2$))

QAP = diag($\hat{E}_1^{-1},(-I_{n_2}+\alpha\hat{E}_2)^{-1}$) (- diag(I_{n_1}, I_{n_2}) + α diag($\hat{E}_1$, $\hat{E}_2$))

QAP = diag($\hat{E}_1^{-1}$ (- I_{n_1} + $\alpha\hat{E}_1$), I_{n_2}),

dengan A_1 = $\hat{E}_1^{-1}$ (- I_{n_1} + $\alpha\hat{E}_1$), maka QAP = diag(A_1 , I_{n_2})

($\Leftarrow$) Pilih $\alpha\notin\sigma(A_1)$, berarti det($\alpha I_{n_1}-A_1$) $\neq$ 0.

Untuk membuktikan matriks pencil sE–A regular cukup dibuktikan det(αE–A) $\neq$ 0

det(αE–A) = det(Q^{-1} (αQEP – QAP) P^{-1}) = det Q^{-1} det(αQEP – QAP) det P^{-1}

$=\det Q^{-1}\det\begin{bmatrix}\alpha I_{n_1}-A_1 & 0\\ 0 & \alpha N-I_{n_2}\end{bmatrix}\det P^{-1}$

$=\det Q^{-1}\det\left(\alpha I_{n_1}-A_1\right)\det\left(\alpha N-I_{n_2}\right)\det P^{-1}\neq 0$

karena $\det Q^{-1}\neq 0$, $\det P^{-1}\neq 0$, det($\alpha I_{n_1}-A_1$) $\neq$ 0 dan $\det\left(\alpha N-I_{n_2}\right)\neq 0$.

Jadi terbukti bahwa det(αE – A) $\neq$ 0.$\amalg$

Dengan demikian untuk selanjutnya sistem (E,A,B,C) diasumsikan bahwa matriks pencil (sE–A) regular supaya sistem mempunyai solusi dan solusinya tunggal. Menggunakan Lemma 2 dan melalui transformasi koordinat $x(t)=P\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$ diperoleh $\dot{x}(t)=P\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}$, dengan $x_1(t)\in R^{n_1}$, $x_2(t)\in R^{n_2}$ dan $n_1+n_2=n$ sehingga sistem (E,A,B,C) menjadi

$$EP\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=AP\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+Bu(t)\quad(5)$$

$$y(t)=CP\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

Jurnal Penelitian Sains ; hal 75 - 81
No.11, April 2002 ISSN: 1410-7058

Selanjutnya mengalikan dari kiri pada kedua ruas persamaan (5) dengan matriks Q, diperoleh$QE P\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = QAP\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + QBu(t)$

$$y(t) = CP\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

mensubstitusi $QB = \begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}$ dan $CP = \begin{bmatrix}C_1 & C_2\end{bmatrix}$ dengan $B_1 \in R^{n_1 x m}$, $B_2 \in R^{n_2 x m}$, $C_1 \in R^{r x n_1}$ dan $C_2 \in R^{r x n_2}$, sehingga diperoleh

$$\dot{x}_1(t) = A_1x_1(t) + B_1u(t) \qquad (6)$$
$$y_1(t) = C_1x_1(t)$$
$$N\dot{x}_2(t) = I_{n_2}x_2(t) + B_2u(t) \quad (7)$$
$$y_2(t) = C_2x_2(t)$$

Persamaan (6) dan (7) disebut bentuk standar dekomposisi sistem (E,A,B,C) yang terdiri dari dua subsistem yaitu subsistem (6) disebut subsistem lambat dan subsistem (7) disebut subsistem cepat.

Berikut ditentukan bentuk solusi dari sistem (E,A,B,C) yang diselesaikan melalui solusi subsistem–subsistemnya.

1. Subsistem lambat

$$\dot{x}_1(t) = A_1x_1(t) + B_1u(t)$$
$$y_1(t) = C_1x_1(t)$$

dengan matriks-matriks konstan $A_1 \in R^{n_1 x n_1}$, $B_1 \in R^{n_1 x m}$, $C_1 \in R^{r x n_1}$ dan $x_1(t) \in R^{n_1}$ vektor keadaan, $u(t) \in R^m$ vektor masukan (kendali) dan $y_1(t) \in R^r$ vektor keluaran.

Dengan kondisi awal $x_1(0) = x_{10}$ dan $t \geq 0$ bentuk solusi dan keluaran sistemnya yang ditulis dengan $x_1(t,x_{10},u)$ dan $y_1(t,x_{10},u)$ adalah

$$x_1(t,x_{10},u) = e^{A_1 t}x_{10} + \int_0^t e^{A_1(t-s)}B_1u(s)ds$$

$y_1(t,x_{10},u)=$

$$C_1\,x_1(t) = C_1e^{A_1 t}x_{10} + \int_0^t C_1e^{A_1(t-s)}B_1u(s)ds$$

2. Subsistem cepat

$$N\dot{x}_2(t) = I_{n_2}x_2(t) + B_2u(t)\ ,\ N$$

nilpoten berindeks h

$$y_2(t) = C_2x_2(t)$$

dengan matriks-matriks konstan $N \in R^{n_2 x n_2}$, $B_2 \in R^{n_2 x m}$, $C_2 \in R^{r x n_2}$ dan $x_2(t) \in R^{n_2}$ vektor keadaan, $u(t) \in R^m$ vektor masukan dan $y_2(t) \in R^r$ vektor keluaran.

Jika diasumsikan u(t) mempunyai turunan ke h yang kontinu sepotong-sepotong pada t >0 maka dengan menurunkan terhadap t secara terus menerus pada kedua ruas persamaan dan mengalikan dari kiri dengan N akan diperoleh:

$$N\dot{x}_2(t) = I_{n_2}x_2(t) + B_2u(t)$$

$$N\ddot{x}_2(t) = \dot{x}_2(t) + B_2\dot{u}(t)$$

$$N^2\ddot{x}_2(t) = N\dot{x}_2(t) + NB_2\dot{u}(t) = I_{n_2}x_2(t) + B_2u(t) + NB_2\dot{u}(t)$$

$$\vdots$$

$$N^h x_2^{(h)}(t) = I_{n_2}x_2(t) + B_2u(t) + \ldots + N^{h-2}B_2u^{(h-2)}(t) + N^{h-1}B_2u^{(h-1)}(t)$$

$$N^h x_2^{(h)}(t) = I_{n_2}x_2(t) + \sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u^{(i)}(t)$$,N nilpoten berindeks h

sehinggadiperoleh $x_2(t) = -\sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u^{(i)}(t)$ merupakan solusi subsistem cepat.

Jadi solusi dan keluaran subsistem cepat yang ditulis dengan $x_2(t,x_{20},u)$ dan $y_2(t,x_{20},u)$ adalah

$$x_2(t,x_{20},u) = -\sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u^{(i)}(t) \quad \text{dan}$$

$$y_2(t,x_{20},u) = -C_2\sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u^{(i)}(t)$$

Pada substate sistem (E,A,B,C) yang terdiri dari state pada subsistem (6) yaitu $x_1(t,x_{10},u)$ dan state pada subsistem (7) yaitu $x_2(t,x_{20},u)$, terlihat bahwa $x_1(t,x_{10},u)$ menampilkan suatu pengaruh komulatif dari u(s) , $0 \leq s \leq t$ dan sementara $x_2(t,x_{20},u)$ menanggapi secara cepat yang terus menerus mencerminkan sifat-sifat u(t) pada waktu t. Kondisi inilah yang menyebabkan subsistem (6) disebut subsistem lambat dan subsistem (7) disebut subsistem cepat.

Solusi dan keluaran sistem (E,A,B,C) diperoleh sebagai berikut

$$x(t) = P\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}\left(e^{A_1 t}x_{10} + \int_0^t e^{A_1(t-s)}B_1u(s)ds\right) - P\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}\sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 u^{(i)}(t) \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

$$y(t)=C_1e^{A_1t}x_{10}+\int_0^t C_1e^{A_1(t-s)}B_1u(s)ds$$

$$-C_2\sum_{i=0}^{h-1}N^iB_2u^{(i)}(t)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

KESIMPULAN

Dari uraian pembahasan maka disimpulkan bahwa suatu sistem linear singular (E,A,B,C) dengan matriks pencil (sE-A) regular disebut sistem linear singular regular. Jadi yang menjamin keberadaan dan ketunggalan solusi adalah jika matriks pencil (sE-A) regular sehingga sistem dapat dibawa ke bentuk dekomposisi standar yang terdiri dari dua subsistem yaitu subsistem lambat dan subsistem cepat. Pada subsistem lambat merupakan sistem normal sehingga solusinya menggunakan sifat-sifat pada sistem normal dan pada subsistem cepat solusinya dapat ditentukan dengan metode derivative. Adapun bentuk solusi sistem (E,A,B,C) adalah sebagai berikut:

$$x(t)=P\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}\left(e^{A_1t}x_{10}+\int_0^t e^{A_1(t-s)}B_1u(s)ds\right)-$$

$$P\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}\sum_{i=0}^{h-1}N^iB_2u^{(i)}(t)$$

dan keluaran keluaran sistemnya adalah

$$y(t)=C_1e^{A_1t}x_{10}+\int_0^t C_1e^{A_1(t-s)}B_1u(s)ds$$

$$-C_2\sum_{i=0}^{h-1}N^iB_2u^{(i)}(t)$$

DAFTAR PUSTAKA

Cullen, Charles G.(1966), Matrices and Linear Transformations, *W.H. Freeman and Company, San Francisco.*

Dai, L.(1988)" Lecture Notes in Control and Information Sciences" *Singular Control Systems, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.*

Gantmacher, F.R, 1960, The Theory of Matrices, *volume 1, Chelsea Publishing Company, New York.*

Gantmacher, F.R, 1960, The Theory of Matrices, *volume 2, Chelsea Publishing Company, New York.*

Hoskins, R.F., 1979, *Generalised Functions,* John Wiley & Sons, Inc.

Olsder, G.J.,1994, Mathemathical Systems Theory, *Delftse Uitgevers Maatschappij, Delft, Netherlands.*

Skelton, R.E., 1988, Dynamic Systems Control, John Wiley & Sons, Inc.