

## PENERAPAN METODA BEDA HINGGA UNTUK PENYELESAIAN PERSAMAAN GELOMBANG KAWASAN WAKTU

Azhar K. Affandi  
Jurusan Fisika FMIPA Universitas Sriwijaya

### ABSTRAK

*Fenomena gerak gelombang merupakan gejala yang sering kita jumpai dalam kehidupan sehari-hari di sekitar kita seperti misalnya gelombang akustik, gelombang elektromagnetik, gelombang seismik dan lain-lain. Semua gerak gelombang tersebut memenuhi persamaan gerak gelombang dan persamaan gelombang merupakan persamaan diferensial parsial hiperbolik*

*Tujuan dari penelitian ini adalah melakukan simulasi gerak gelombang dalam domain waktu dengan menggunakan metoda beda hingga.*

*Metoda beda hingga merupakan salah satu dari metoda numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial atau persamaan Laplace dengan cara mendiskretisasi persamaan kontinu melalui diskretisasi ruang dan waktu.*

*Hasil yang diperoleh dari penelitian ini didapatkan bentuk simpangan gelombang dalam domain waktu dari berbagai keadaan syarat awal dan kriteria stabilitas yang diberikan. Simpangan maksimum gelombang akan turun menjadi setengahnya bila parameter integrasi  $M$  dinaikkan dua kali lipatnya. Dari analisis frekuensi menunjukkan bahwa frekuensi dominannya merupakan frekuensi rendah dan frekuensi tersebut akan menjadi dua kali lipat apabila parameter integrasi  $M$  ditingkatkan dua kali.*

### PENDAHULUAN

Salah satu fenomena fundamental dan umum yang sering terjadi di alam adalah fenomena gerak gelombang.

Persamaan gelombang berdasarkan sudut pandang matematika analitis termasuk

dalam jenis persamaan diferensial parsial hiperbolik (Basarudin, 1994).

Pada penelitian ini akan dikaji penyelesaian persamaan gelombang dengan metoda beda hingga. Metoda beda hingga untuk persamaan diferensial parsial merupakan salah satu metoda yang populer. Karena dengan metoda beda hingga akan

didapat solusi pendekatan secara numerik , yang mana solusi tersebut dapat memberikan gambaran distribusi parameter yang dikaji dalam ruang dan waktu.

### PERSAMAAN GELOMBANG SATU DIMENSI

Metode beda hingga domain waktu dapat digunakan untuk solusi persamaan gelombang. Untuk hal tersebut, dimulai dengan kondisi yang paling sederhana, yakni dalam satu dimensi, dimana persamaan gelombang biasa dituliskan sebagai

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \text{ (Fletcher, Magnier, 1994) (1)}$$

Solusi umum dari persamaan ini menurut Booton (1992) dapat terdiri dari dua gelombang yang menjalar dalam arah x positif, sehingga

$$E(x,t) = E_1(x - ct) + E_2(x + ct) \quad (2)$$

Dua fungsi pada sisi kanan persamaan (2) ditentukan oleh syarat batas dan awal.

Syarat batas yang diperlukan :

$$E(0,t) = b(t) \text{ dan } (a,t) = c(t) \quad (3)$$

dan syarat awal adalah

$$E(x,0) = f(x) \text{ dan } \frac{\partial}{\partial t} E(x,0) = g(x) \quad (4)$$

Jika pendekatan beda hingga digunakan pada variabel x, dan kita ambil h sebagai

$$h = \frac{a}{N} \quad (5)$$

Beda pusat (*Central difference*) untuk turunan kedua untuk variabel x

$$E(i+1,t) - 2E(i,t) + E(i-1,t) = \frac{h^2}{c^2} \frac{d^2 E(i,t)}{dt^2} \quad (6)$$

dimana persamaan diferensial parsial sekarang digantikan oleh persamaan diferensial biasa. Terdapat sejumlah N+1 titik, dimana nilai E diketahui dari syarat batas, dan N-1 lokasi dimana E harus ditentukan dari N-1 persamaan diferensial

biasa yang didefinisikan oleh persamaan (6). Walaupun itu terkadang solusi persamaan diferensial biasa tersebut secara analitik lebih mendekati, tetapi biasanya solusi numerik lebih baik.



### KUANTISASI WAKTU

Disamping kuantisasi variabel ruang, variabel waktu dapat dikuantisasi dengan cara yang sama menggunakan interval waktu

$\delta$ . Fungsi diskret dilambangkan dengan  $E(i,n)$ , dan penerapan dari pendekatan beda pusat untuk turunan terhadap waktu :

$$\frac{E(i,n+1) - 2E(i,n) + E(i,n-1)}{\delta^2} = c^2 \frac{E(i+1,n) - 2E(i,n) + E(i-1,n)}{h^2} \quad (7)$$

Penyederhanaan persamaan (7)

$$E(i,n+1) - 2E(i,n) + E(i,n-1) = \rho^2 [E(i+1,n) - 2E(i,n) + E(i-1,n)], \quad (8)$$

dimana

$$\rho = \frac{c\delta}{h} \quad (9)$$

Bentuk lebih sederhana dari persamaan (8) adalah :

$$E(i,n+1) = (2 - 2\rho^2)E(i,n) - E(i,n-1) + \rho^2 S(i,n) \quad (10)$$

dimana

$$S(i,n) = E(i-1,n) + E(i+1,n) \quad (11)$$

E ditentukan dari syarat batas yang diberikan,

$$E(0,n) = b(n\delta) \text{ dan } E(N,n) = c(n\delta) \quad (12)$$

Satu lagi E ditentukan untuk  $n = 0$  dan  $n = 1$  dari syarat awal, nilai berikutnya dapat dihitung secara eksplisit, dan dapat ditunjukkan bahwa proses numerik ini akan stabil jika

$$\rho \leq 1 \quad (13)$$

Selanjutnya akan dicari suatu kondisi dimana pendekatan beda hingga yang telah digunakan akan diharapkan memberikan akurasi yang dapat diterima. Untuk hal ini digunakan solusi sinusoidal. Solusi kontinu mempunyai bentuk

$$E(x,t) = \sin\left(\frac{\omega}{c}x - \omega t\right). \quad (14)$$

Solusi diskret dapat ditentukan dengan

$$E(i,n) = \sin\left(\frac{\omega}{c}ih - n\omega\delta\right). \quad (15)$$

Selanjutnya tentukan turunan kedua dari (14) terhadap x

$$\frac{E(i+1,n) - 2E(i,n) + E(i-1,n)}{h^2} = \frac{2}{h^2} \left( \cos\frac{\omega h}{c} - 1 \right) \sin\left(\frac{\omega x}{c} - \omega t\right). \quad (17)$$

Pendekatan untuk turunan kedua akan valid jika

$$\cos\frac{\omega h}{c} - 1 = -\frac{\omega^2 h^2}{2c^2} \quad (18)$$

Pendekatan ini cukup baik jika

$$\left(\frac{\omega h}{c}\right)_{maks} = 0,35. \quad (19)$$

Dalam suku panjang gelombang  $\lambda$ , batasnya mendekati

$$\frac{h}{\lambda} \leq 0,055 \quad (20)$$

yang berarti bahwa kita akan memiliki sedikitnya 18 titik tiap panjang gelombang, yang terlihat dapat diterima. Sebuah perhitungan sederhana untuk pendekatan pada turunan terhadap waktu

$$(\omega\delta)_{max} = 0,35. \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \sin\left(\frac{\omega}{c}x - \omega t\right), \quad (16)$$

dan untuk solusi diskret persamaan (16), dengan beberapa manipulasi trigonometri memberikan

Karena

$$\omega\delta = \rho kh \quad (22)$$

dan  $\rho$  harus kurang dari 1 untuk kestabilan (Bootton,1994), persamaan (21) secara otomatis baik jika persamaan (19) cukup baik. Syarat yang baru saja diturunkan menunjukkan ketika kita ingin mengharapkan suatu akurasi yang dapat diterima mewakili solusi kontinu.

### KONDISI AWAL

Disamping dua buah syarat batas valid untuk semua waktu  $t$  dan dua syarat awal didefinisikan untuk semua  $x$  diberikan untuk menentukan solusi persamaan diferensial. Dua syarat awal biasanya diambil

sebagai nilai waktu  $t$  sama dengan nol dan nilai turunan pertama terhadap waktu sama dengan nol. Perpindahan dari syarat batas dan nilai awal fungsi ke dalam kondisi fungsi diskret diberikan oleh persamaan (3) dan (4). Penggunaan syarat awal turunan pertama, membutuhkan lebih banyak usaha. Penggunaan pendekatan turunan pertama

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{E(x, \delta) - E(x, 0)}{\delta}, \quad (23)$$

tapi seperti terlihat sebelumnya, pendekatan ini akurat hanya pada orde pertama dalam  $\delta$ . Pendekatan orde kedua dapat ditentukan dari uraian deret Taylor

$$E(x, \delta) = E(x, 0) + \delta \frac{\partial E}{\partial t}(x, 0) + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}(x, 0) + \dots \quad (24)$$

Substitusi dari persamaan gelombang memberikan

$$E(x, \delta) = E(x, 0) + \delta \frac{\partial E}{\partial t}(x, 0) + \frac{c^2 \delta^2}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}(x, 0) + \dots \quad (25)$$

Pengenalan pendekatan beda hingga untuk turunan terhadap  $x$  menghasilkan

$$E(x, \delta) = E(x, 0) + \delta \frac{\partial E}{\partial t}(x, 0) + \frac{c^2 \delta^2}{2h^2} x [E(x-h, 0) - 2E(x, 0) + E(x+h, 0)] + \dots, \quad (26)$$

yang dapat disusun lagi menjadi

$$E(x, \delta) = (1 - \rho^2)E(x, 0) + \delta g(x) + \frac{\rho^2}{2} S(x, 0), \quad (27)$$

dimana

$$S(x, 0) = E(x-h, 0) + E(x+h, 0). \quad (28)$$

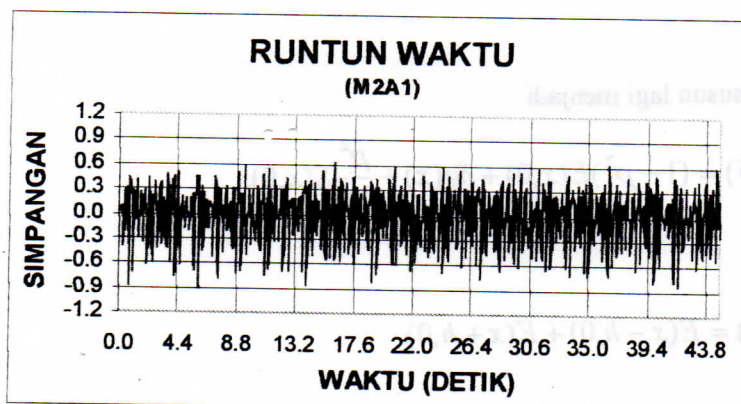


## HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada penelitian ini dilakukan simulasi bentuk gelombang yang diturunkan dari persamaan gelombang sebagaimana dituliskan pada persamaan (1) pustaka dan penyelesaian numerik dari persamaan gelombang tersebut menggunakan pendekatan beda hingga. Metoda beda hingga dalam kajian ini diterapkan dalam kawasan waktu (finite difference time domain method). Hal ini dilakukan mengingat fungsi gelombang dalam kawasan waktu banyak memberikan makna dalam pemelajaran gelombang tersebut, dalam pengertian dapat ditelusuri parameter atau besaran fisis dari fungsi gelombang tersebut seperti misalnya kecepatan jalar gelombang, dan frekuensi. Pemelajaran parameter fisis ini penting sehingga kita dapat melakukan simulasi

bentuk gelombang yang kita inginkan dengan merancang parameter - parameter atau besaran fisis dalam pemrograman. Rancangan ini juga dapat dikaitkan dengan keadaan fisis atau kondisi mendekati kenyataan dalam praktek.

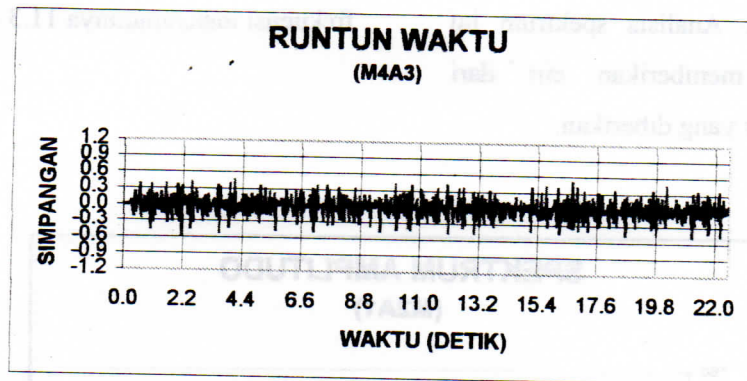
Simulasi dilakukan dengan merubah parameter integrasi  $M$  dan  $\alpha$ . Pertama dilakukan untuk  $M$  sama dengan dua dan  $\alpha$  1 dengan faktor stabilitas integrasi  $\rho = \sqrt{0.5}$  diperoleh hasil sebagaimana dalam gambar 1. Sinyal gelombang yang terbentuk pada gambar 1 tersebut boleh dikatakan sebagai gelombang stasioner dengan amplitudo sekitar 7.5 dan waktu perekaman sekitar 44 detik. Sebenarnya telah dilakukan perubahan nilai  $\alpha$  yaitu 3 dan 5, tetapi perubahan nilai  $\alpha$  tidak begitu berpengaruh pada bentuk gelombang.



Gambar 1. Runtun waktu untuk  $M=2$  dan  $\alpha=1$

Pada langkah kedua dilakukan perubahan pada  $M=4$  dan  $\alpha=3$ . Terlihat bahwa dengan merubah  $M$  dua kali dari yang pertama diperoleh waktu rekaman sekitar 22 detik

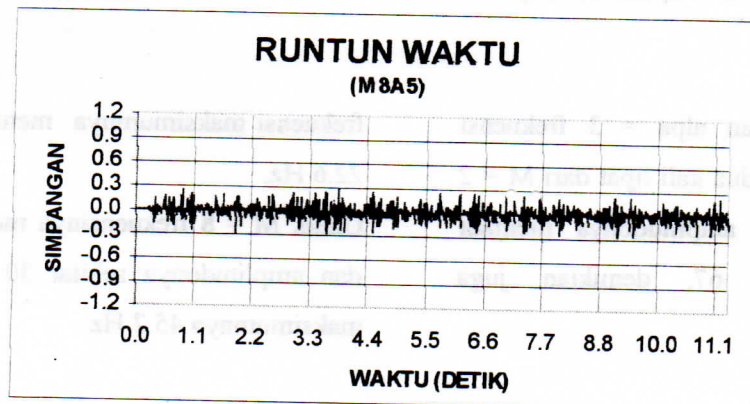
atau separuh dari yang  $M=2$  dan amplitudo gelombangnya sedikit mengecil yaitu sekitar 0.5. Secara umum gelombangnya juga stationer (Gambar 2).



Gambar 2. Runtun waktu untuk  $M=4$  dan  $\alpha=3$

Berikutnya dilakukan perubahan  $M=8$  dan  $\alpha=5$ . Nampak bahwa waktu rekaman separuh dari  $M=4$  atau seperempat dari  $M$

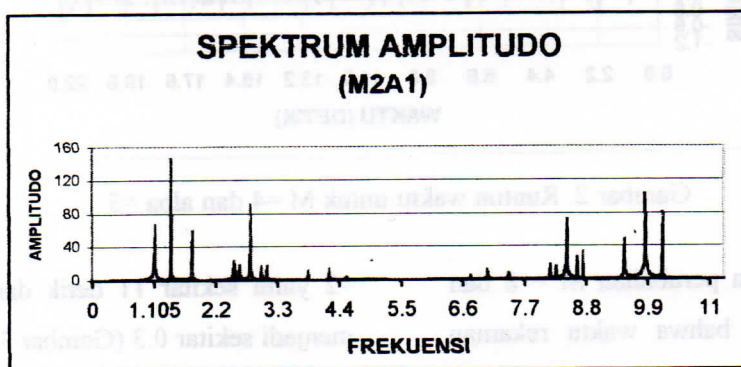
$=2$  yaitu sekitar 11 detik dan amplitudonya menjadi sekitar 0.3 (Gambar 3).



Gambar 3. Runtun waktu untuk  $M=8$  dan  $\alpha=5$

Kajian lebih lanjut mengenai spektrum amplitudo untuk mengetahui sebaran frekuensi dominannya. Kajian spektrum amplitudo banyak metoda yang dikenal, dan dalam penelitian ini digunakan metoda tranformasi Fourier. Analisis spektrum ini diharapkan akan memberikan ciri dari perubahan parameter yang diberikan.

Analisis spektrum dari runtun waktu di atas menunjukkan bahwa frekuensi dominan berada kedudukan frekuensi rendah. Pada  $M = 2$  dan  $\alpha = 1$  terlihat frekuensi dominan pada 2.8 Hz dan amplitudo sekitar 125 serta frekuensi maksimumnya 11.3 Hz.



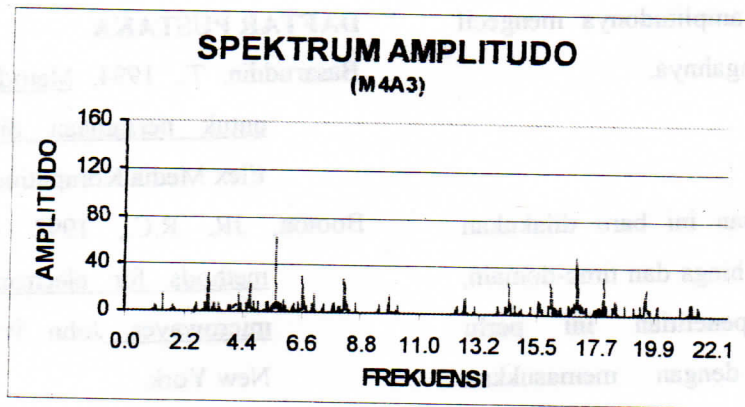
Gambar 4. Spektrum amplitudo untuk runtun waktu  $M=2$  dan  $\alpha=1$

Pada  $M = 4$  dengan  $\alpha = 3$  frekuensi dominan meningkat dua kali lipat dari  $M = 2$  yaitu 5.6 Hz dan amplitudonya menjadi setengahnya yaitu 67, demikian juga

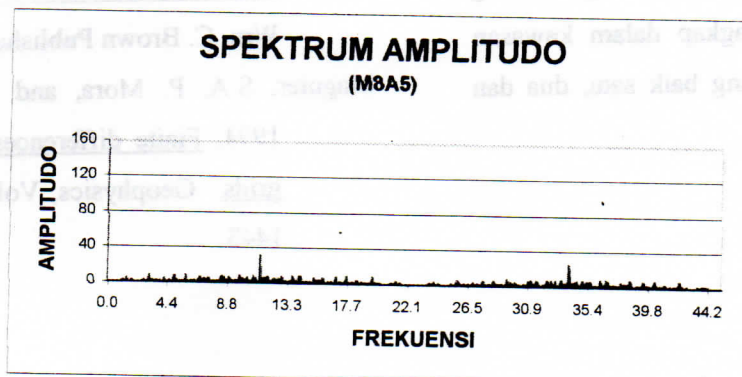
frekuensi maksimumnya meningkat menjadi 22.6 Hz.

Untuk  $M = 8$  frekuensinya menjadi 11.3 Hz dan amplitudonya sekitar 30 dan frekuensi maksimumnya 45.2 Hz





Gambar 5. Spektrum amplitudo untuk runtun waktu  $M=4$  dan  $\alpha=3$



Gambar 6. Spektrum amplitudo untuk runtun waktu  $M=8$  dan  $\alpha=5$

## KESIMPULAN DAN SARAN

### 6.1. Kesimpulan

Dari hasil dan pembahasan dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

- Pemodelan gelombang dengan metoda beda hingga memberikan hasil bentuk gelombang yang cukup baik.

- Bentuk gelombang hasil simulasi merupakan bentuk gelombang yang stationer.
- Frekuensi gelombang bergantung dari parameter model yaitu  $M$ , dimana apabila nilai  $M$  dinaikkan menjadi dua kali lipat maka frekuensinya baik dominan maupun maksimumnya akan menjadi dua kali

- pula, tetapi amplitudonya mengecil menjadi setengahnya.

## 6.2. Saran – Saran

- Pada penelitian ini baru dilakukan metoda beda hinga dan time-domain, oleh itu penelitian ini perlu dilanjutkan dengan memasukkan variable spasial sehingga akan didapat gambaran bentuk gelombang yang lebih lengkap dalam kawasan waktu dan ruang baik satu, dua dan tiga dimensi.

## DAFTAR PUSTAKA

- Basaruddin, T., 1994, Metoda beda hingga untuk persamaan diferensial, PT. Elex Media Komputindo, Jakarta.
- Booton, JR, R.C., 1992, Computational methods for electromagnetics and microwaves, John Wiley & Sons, New York.
- Fletcher, G., 1994, Introduction to mathematical method in Physics, Wm. C. Brown Publisher, England
- Magnier, S.A, P. Mora, and A. Tarantola, 1994, Finite differences on minimal grids, Geophysics, Vol. 59, p 1435-1443