Jurnal Penelitian Sains ; hal 62 - 67
No.9. April 2001 ISSN: 1410-7058

MODEL 1-D PERPINDAHAN PANAS DALAM MEDIUM BERPORI

Frinsyah Virgo
Jurusan Fisika FMIPA Universitas Sriwijaya

ABSTRAK

Model 1-D perpindahan panas dalam medium berpori menggambarkan proses konduksi dan konveksi yang terjadi dalam medium berpori dengan model bumi berupa lapisan tak-hingga. Pendekatan matematis yang digunakan dalam pemodelan ini adalah metoda beda hingga, dimana hasil dari pemodelan akan dibandingkan dengan metoda analitis pada keadaan kesetimbangan termalnya.

PENDAHULUAN

Proses perpindahan panas yang terjadi di alam dapat digambarkan atau didekati dengan suatu pemodelan matematis, dalam hal ini dengan menggunakan metoda numerik beda hingga (*finite difference*).

Dalam menerapkan metoda ini terlebih dahulu persamaan perpindahan panas (konduksi/ konveksi) dirumuskan dengan persamaan diferensial, guna menentukan syarat batas dan persamaan aljabarnya. Hal tersebut dilakukan dengan mengganti daerah yang kontinu dengan pola titik-titik diskrit dengan menggunakan pendekatan beda-hingga antara titik-titik tersebut (Smith, 1985).

PERPINDAHAN PANAS

Konduksi

Bentuk persamaan matematika perpindahan panas dengan cara konduksi ditulis sebagai

$$Q_k = -kA\frac{dT}{dx} \qquad (1)$$

dimana arah naiknya jarak x menyatakan arah aliran panas positif. Mengingat hukum termodinamika, panas akan mengalir secara otomatis dari titik yang bersuhu tinggi ke titik yang bersuhu lebih rendah, maka aliran panas akan menjadi positif bila landaian suhu negatif.

Konveksi

Laju perpindahan panas dengan cara konveksi antara suatu permukaan fluida dapat dihitung dengan hubungan

$$q_c = h_c.A.\ \ T \qquad (2)$$

dimana q_c adalah laju perpindahan panas dengan cara konveksi. A adalah luas penampang perpindahan panas, ΔT adalah beda antara suhu permukaan dengan suhu fluida dan h_c adalah koefisien perpindahan panas konveksi.

Dalam medium berpori, seperti batuan sedimen, panas dihantarkan secara konduksi atau difusi. Jika fluida mengalir dalam medium pori, maka kontribusi hantaran panas secara konveksi perlu diperhitungkan (Holman, 1992).

Persamaan perpindahan panas konduksi/konveksi dalam bentuk sederhana dalam 1-D diberikan oleh:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho_s c_s}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) - \left(\frac{\rho_f c_f}{\rho_s c_s}\right) V_f \phi \frac{\partial T}{\partial z} \qquad (3)$$

dimana T adalah suhu (K), t adalah waktu (detik), k adalah konduktivitas termal dalam medium padat ($Wm^{-1}K^{-1}$), ρ_s dan ρ_f berturut-turut adalah kerapatan panas spesifik zat padat dan fluida, c_s dan c_f berturut-turut adalah kapasitas panas spesifik zat padat dan fluida ($Jkg^{-1}K^{-1}$), V_f adalah kecepatan fluida ($m.sec^{-1}$), ϕ adalah porositas medium dan z adalah arah aliran panas. Dengan menyederhanakan tetapan pada persamaan (3), maka dapat dituliskan

$$K = \frac{k}{\rho_s c_s}\ ; M = \frac{\rho_f c_f}{\rho_s c_s}\ ;\ W = V_f \phi \qquad (4)$$

dimana K adalah difusivitas termal medium padat ($m^2 sec^{-1}$) dan W adalah fluks fluida efektif ($m\ sec^{-1}$). Hasil penyederhanaan dapat dinyatakan:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - MW\frac{\partial T}{\partial z} \qquad (5)$$

Persamaan (5) adalah persamaan diferensial 1-D untuk aliran panas konduksi/konveksi dalam medium berpori. Persamaan ini menyatakan bahwa perubahan rata-rata dari suhu adalah ekivalen dengan jumlah perpindahan panas secara konduksi dan perpindahan panas secara konveksi. Persamaan (5) adalah penyederhanaan dari kasus real, dimana panas internal, ekspansi termal, kompresibilitas, kebergantungan panas dan konduktivitas termal pada suhu dan parameter lainnya tidak diperhitungkan. Lebih lanjut, persamaan (5) digunakan pada medium homogen satu dimensi.

METODA ANALITIS

Solusi yang bergantung waktu pada persamaan (5) tidakdapat diperoleh dengan metoda analitis, kecuali untuk kasus-kasus yang sederhana. Solusi untuk persamaan perpindahan panas dalam keadaan transien dilakukan dengan menggunakan metoda beda-hingga. Persamaan kekekalan masa 2-D untuk aliran fluida tak tertekan (*incompressible*) diberikan oleh

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}=0 \qquad (6)$$

dengan u dan v masing-masing menyatakan kecepatan aliran dalam arah x dan z.

Persamaan (6) dapat juga digunakan untuk aliran dalam medium berpori, jika matrik batuan tidak berubah dan aliran bersifat tak-tertekan. Komponen kecepatan dalam persamaan di atas adalah kecepatan Darcy. Dari persamaan (5) dan (6) untuk perpindahan panas tunak 1-D dengan aliran menuju permukaan didapat hubungan :

$$\frac{\partial v}{\partial z}=0 \qquad (7)$$

$$MW\frac{\partial T}{\partial z}=K\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \qquad (8)$$

Penyelesaian analitis model bumi berupa lapisan tak-hingga untuk persamaan (8) bergantung kedalaman diberikan oleh

$$T=T_r-(T_r-T_0)\exp\left(\frac{MWz}{K}\right) \qquad (9)$$

Dengan T_0 dan T_r masing-masing menyatakan temperatur awal yang diberikan dan temperatur dalam arah radial.

DISKRITISASI PERSAMAAN

Diskritisasi persamaan (5) untuk suhu pada kedalaman ke-i dan waktu ke-(n+1) diberikan oleh

$$T_i^{n+1}=\frac{T_{i+1}^{n+1}[a]+T_{i-1}^{n+1}[b]+T_{i+1}^{n}[a]+T_i^{n}[c]+T_{i-1}^{n}[b]}{1+r+\frac{\mu}{2}(2\sigma-1)} \qquad (10)$$

dimana r adalah faktor stabilitas;

$$r=\frac{K\Delta t}{\Delta z^2}\ dan\ \mu=\frac{MW\Delta t}{\Delta z} \qquad (11)$$

$$a=\frac{r}{2}-\frac{\mu}{2}(1-\sigma)\ ;\ b=\frac{r}{2}+\frac{\mu\sigma}{2}$$

$$c=1-r-\frac{\mu}{2}(2\sigma-1) \qquad (12)$$

dimana σ adalah stress yang bekerja pada medium. Dengan memilih r = 0.4 akan diperoleh penyelesaian numerik yang stabil tak-terkondisi (Menke, 1989).

Pemilihan kondisi batas dilakukan dengan memilih dua suhu pada dua lapisan yang terpisah pada titik ekstrim dari koordinat ruang, yang disebut juga dengan kondisi syarat batas Dirichlet. Pemilihan praktis kondisi batas adalah dengan mengambil harga suhu permukaan (pada z=0) dan suhu pada bagian kedalaman maksimum(pada $z = z_{max}$).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Gambar 1 memperlihatkan pola perubahan aliran panas bergantung waktu pada berbagai porositas untuk aliran fluida tak-tertekan menuju permukaan bumi, medium diasumsikan homogen. Keadaan awal dari model simulasi diasumsikan linier, dimana keadaan awal ditunjukkan oleh t = 0 kyears.

Sebagai pembanding dapat dilihat perbedaan temperatur pada waktu t =500 kyears yang ditunjukkan oleh Gambar 2. Suhu akan semakin besar dengan semakin besarnya porositas. Dengan semakin besarnya porositas, maka fluks fluida efektif akan semakin besar. Peranan konveksi sangat bergantung pada adanya aliran fluida yang bergerak melalui lapisan berpori yang besarnya dipengaruhi oleh besarnya fluks fluida. Dari kurva dapat dilihat kecenderungan perubahan suhu. Untuk porositas kecil (porositas 0.04) perbedaan antara keadaan awal dan keadaan kesetimbangan termal tidak begitu besar, dalam model ini dapat dikatakan peranan konveksi tidak ada, sehingga yang terjadi hanya proses konduksi.

Metoda numerik dan analitik diterapkan ke dalam persamaan (3). Kemudian selisih dari hasil kedua metoda tersebut merupakan kesalahan/tingkat kepercayaan dari pemodelan. Untuk minimisasi kesalahan dalam metoda numerik digunakan metoda Least Square.

Perbandingan solusi analitis dan numerik untuk model bumi berupa lapisan tak-hingga digambarkan oleh Gambar 3. Gradien termal linier pada kedalaman 10 km adalah 99 °C/km. Pendekatan numerik memiliki kesalahan yang kecil, untuk porositas 0.20 kesalahan analisa numerik terhadap metoda analitik adalah 17.3%, porositas 0.35 kesalahan analisa numerik terhadap metoda analitik adalah 3.62% dan untuk porositas 0.50 memiliki kesalahan analisa 0.835%. Dari pembahasan ini terlihat bahwa pendekatan numerik cukup akurat dalam memodelkan bumi berupa lapisan tak-hingga.

KESIMPULAN

- Dalam model ini perpindahan panas yang dominan adalah proses secara konduksi, sedangkan perpindahan panas secara konveksi dapat diabaikan untuk porositas < 0.20.

- Pada aliran fluida menuju permukaan, besar temperatur akan semakin besar dengan meningkatnya fluks dari fluida.
- Model 1-D perpindahan panas dalam medium berpori dapat didekati dengan dengan metoda meda-hingga.

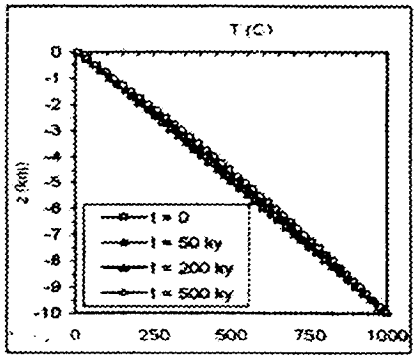
DAFTAR PUSTAKA

Grant. M. A., 1982. *Geothermal Reservoar Engineering*, Academic Press. Inc., USA.

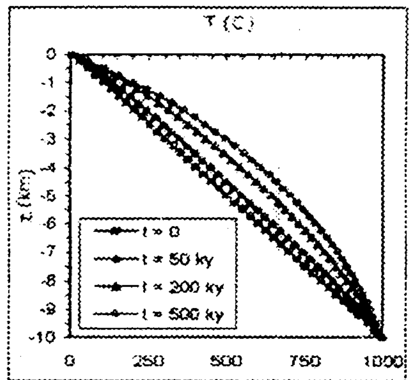
Holman, J. P., 1992. *Heat Transfer*, Sevent Edition, McGraw-Hill Book Company, Chapman & Hall. UK.

Menke, W., 1989. *Geophysics Data Analysis Discrete Inverse Theory*, Received Edition, Academic Press., San Diego, California, USA.

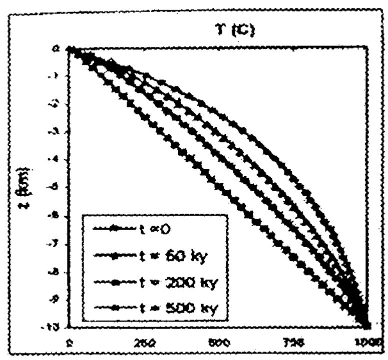
Smith, G. D., 1985. *Numerical Solution of Partial Differential Equation : Finite Difference Method*, Third Edition, Clarendon Press., Oxford University, USA.



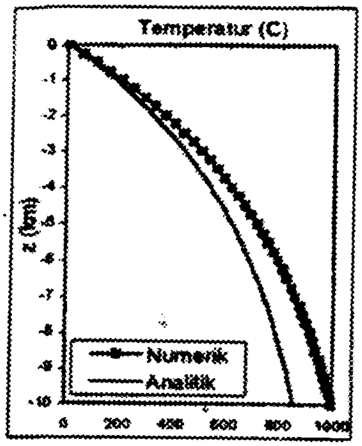
(A). Porositas 0.04.



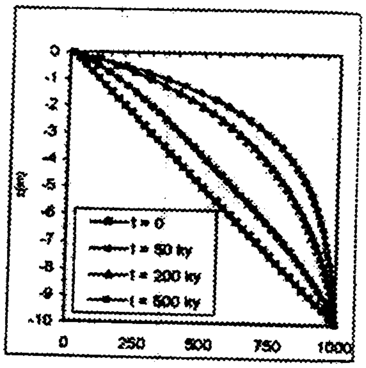
(B) Porositas 0.20.



(C). Porositas 0.35.

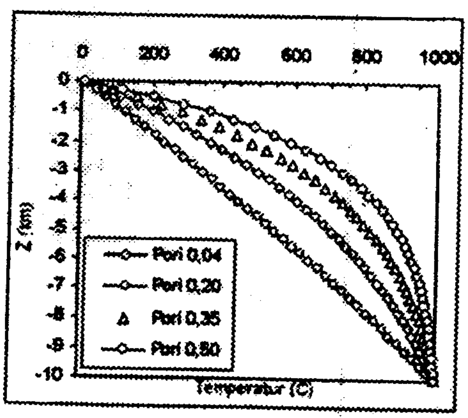


(A). Porositas 0.20

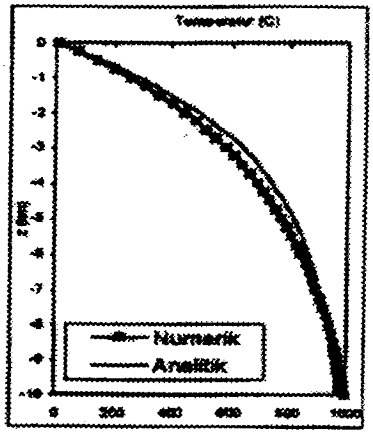


(D). Porositas 0.50.

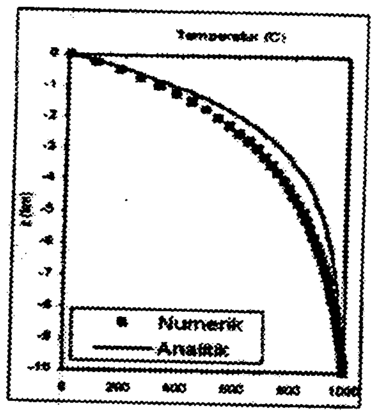
Gambar 1. Pola aliran konduksi-konveksi pada medium berpori.



Gambar 2. Keadaan suhu pada waktu t = 500 kyears dalam medium berpori.



(B). Porositas 0.35.



(C).

Porositas 0.50.

Gambar 3. Solusi analitis dan numeric pada keadaan kesetimbangan termal.