

## ANALISIS GEJALA CHAOS PADA DOBEL PENDULUM

Fiber Manado  
Jurusan Fisika FMIPA Universitas Sriwijaya

### ABSTRAK

*Telah dilakukan analisis gejala chaos pada dobel pendulum. Analisis dilakukan dengan grafik times series, diagram ruang fasa dan plot Poincare. Diperoleh tiga karakteristik utama dinamika gerak: periodik, quasiperiodik dan chaos. Masing-masing keadaan dicapai bila dimasukkan kondisi awal posisi dan momentum yang bersesuaian.*

### PENDAHULUAN

**D**alam bidang ilmu fisika, dinamika gerak dengan dua derajat kebebasan atau lebih dapat menunjukkan gejala *chaos*. Contoh sistem yang paling populer, yang menunjukkan gejala *chaos* pada bidang ilmu fisika adalah pendulum sederhana dengan redaman dan gaya luar. Masih banyak lagi sistem fisis yang dapat menunjukkan gejala *chaos*. Dalam tulisan ini akan dibahas sistem fisis yang cukup sederhana, namun diharapkan dapat menunjukkan perilaku chaos, yaitu dobel pendulum.

Persamaan gerak dobel pendulum ini diturunkan dengan menggunakan fungsi Hamilton  $H(q,p;t)$ , sehingga akan diperoleh persamaan diferensial orde pertama yang terkopel. Selanjutnya persamaan gerak yang berbentuk diferensial inilah yang akan

diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metoda Runge-Kutta orde-4 dan dibuat program perangkat lunaknya menggunakan bahasa pemrograman Visual Basic.

### Dinamika Hamiltonian

Perumusan Hamiltonian adalah suatu teknik yang ampuh dan efektif untuk analisis persoalan dinamika (Rasband, 1997). Pada perumusan Hamiltonian dari dinamika klasik, sistem dilukiskan oleh pasangan persamaan diferensial orde pertama untuk setiap derajat kebebasannya, yaitu variabel kanonik  $q_i$  dan momentum konjugate  $p_i$ . Secara normal Hamiltonian untuk setiap persoalan harus dibangun melalui perumusan Lagrangian. Prosedur formalnya mengikuti urutan berikut (Goldstein, 1980):

- Pilih kumpulan koordinat umum  $q_i$ ,  
Langrangian  $L(q_i, \dot{q}_i, t)$  dibangun.

- Momentum konjugate didefinisikan sebagai fungsi dari  $q_i, \dot{q}_i$ , dan  $t$  oleh:

$$p_i = \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i} \quad (1)$$

- Untuk membentuk Hamiltonian digunakan persamaan:

$$H(q, p, t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t) \quad (2)$$

- Persamaan (2) kemudian dibalik untuk memperoleh  $\dot{q}_i$  sebagai fungsi dari  $(q, p, t)$ .
- Hasil dari langkah di atas kemudian digunakan untuk mengeliminasi  $\dot{q}$  dari  $H$ , sehingga ekspresi dari  $H$  itu sendiri adalah fungsi dari  $(q, p, t)$ .

Untuk Hamiltonian  $H(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$  evolusi waktu dari koordinat kanonik ditentukan oleh  $2N$  persamaan kanonik berikut:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{dan} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1 \dots N \quad (3)$$

Koordinat kanonik dari suatu sistem dinamik dengan  $N$  derajat kebebasan menjangkau ruang  $2N$  dimensi yang disebut ruang fasa (*phase space*) dari sistem. Dalam ruang fasa ini suatu keadaan dari sistem dicirikan oleh sebuah titik tunggal.

Sebagai contoh, kita tinjau sistem dengan satu derajat kebebasan dengan Hamiltonian  $H(q, p)$  yang memenuhi

kekekalan energi dari sistem ini. Persamaan Hamiltonian  $H(q, p) = \text{konstan}$ , secara lengkap menentukan trajektori dalam ruang  $(q, p)$ . Untuk gerak terikat, maka semua trajektorinya tertutup dan gerak sepanjang trajektori ini periodik.

Kemudian kita tinjau sistem dengan dua derajat kebebasan, dicirikan oleh Hamiltonian  $H(q_i, p_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Dalam kasus ini persamaan tunggal  $H = \text{konstan}$  tidak menentukan jalan dari suatu trajektori dalam ruang fasa 4d, dimana semua trajektori untuk suatu energi yang diberikan terkurung.

Adanya integral gerak kedua  $I(q_1, q_2, p_1, p_2)$  menentukan *hypersurface* 3d lain yang invarian dibawah evolusi waktu. Beberapa trajektori yang diberikan terletak pada perpotongan dua permukaan yang ditentukan oleh  $H = \text{konstan}$  dan  $I = \text{konstan}$ , yaitu suatu permukaan 2d dalam ruang 4d. Permukaan ini mempunyai topologi sebuah torus (Tabor, 1989) Karena sulit untuk memvisualisasikan objek dalam ruang 4d daripada objek 2d, maka kita berharap melihat torus invarian ini muncul pada energi *hypersurface* 3d dimana torus ini berbentuk seperti donat.

Adanya integral gerak kedua  $I$  juga menyatakan secara tidak langsung adanya suatu transformasi kanonik khusus dari

koordinat kanonik  $q_1, q_2, p_1, p_2$  ke koordinat sudut aksi  $J_1, J_2, \phi_1, \phi_2$ . Dalam ruang  $(q_1, q_2, p_1, p_2)$ , sumbu lokal  $J_i$  tegak lurus dan sumbu lokal  $\phi_i$  menyinggung beberapa torus invarian. Torus ini kemudian hanya ditentukan oleh koordinat aksi  $J_i$  dan gerak titik fasa pada torus ditentukan oleh koordinat aksi  $\phi_i(t)$ .

Karena torus seluruhnya terletak pada energi *hypersurface* yang diberikan, maka Hamiltonian dinyatakan dalam suku-suku koordinat baru hanyalah fungsi dari variabel aksi  $H(q_1, q_2, p_1, p_2) = H(J_1, J_2)$ . Persamaan gerak kanoniknya dapat dituliskan dengan hubungan :

$$J_i = -\frac{\partial H}{\partial \phi_i} = 0, \quad (4)$$

$$\dot{\phi}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} = \omega_i(J_1, J_2)$$

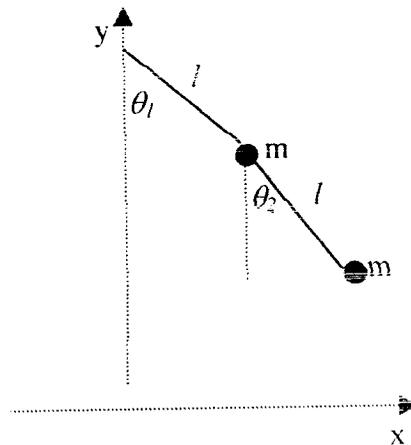
Ketiadaan integral gerak kedua  $I$  benar-benar membuka gerbang menuju gerak kaotik. Trajektori ini tak lebih lama perlu dikurung pada permukaan  $2d$  dalam ruang fasa dan mungkin dapat mengambil bagian lebih kompleks pada energi *hypersurface* tanpa melanggar syarat takberpotongan. Demikian juga tak adanya koordinat sudut aksi membuang kendala periodisitas dan quasiperiodisitas dan membolehkan gerak yang lebih kompleks, dicirikan oleh spektrum

intensitas kontinu. Semua kemungkinan kompleksitas baru ini diwujudkan dengan trajektori *chaotic* dalam suatu Hamiltonian yang tidak dapat diintegrasikan (*nonintegrable*).

## METODOLOGI

### Perumusan dinamika dobel pendulum

Tinjau sistem dengan dua derajat kebebasan yang dicirikan oleh Hamiltonian  $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ . Sebagai contoh sistem fisik yang lebih realistik adalah dobel pendulum, seperti digambarkan di bawah ini:



**Gambar 1. Dobel pendulum. Dengan menetapkan  $m = 1, l = 1$  dan  $g = 1$ .**

Sistem ini mengandung dua benda titik dengan massa  $m$  yang sama. Salah satu benda titik tergantung pada suatu titik tetap oleh sebuah batang tanpa massa dengan panjang  $l$  dan yang lain digantungkan pada

benda titik pertama oleh batang yang serupa. (lihat Gambar 1). Energi total dari sistem ini adalah kekal, yang dalam hal ini diwakili oleh Hamiltoniannya. Kita akan menentukan bahwa tidak semua trajektori ruang fasa dikurung terhadap torus invarian.

Secara umum teknik untuk membangun Hamiltonian bagi suatu sistem mekanika dapat dijumpai dalam buku teks mekanika klasik (McCauley, 1997, Goldstein,

Energi kinetik sistem diberikan oleh:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}_1 + \dot{y}_1) + \frac{1}{2} m(\dot{x}_2 + \dot{y}_2) - \frac{1}{2} ml^2 (2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) \quad (6)$$

dan energi potensial dinyatakan oleh:  $V = mgl(4 - 2\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$  (7)

Lagrangian sistem dibentuk dari energi kinetik dikurangi energi potensial, yaitu:

$$L = \frac{1}{2} ml^2 (2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) - mgl(4 + 2\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \quad (8)$$

Momentum kanonik  $p_i = \partial L / \partial \dot{\theta}_i$ , konjugate terhadap koordinat  $q_i = \theta_i$  diperoleh sebagai berikut:

$$p_1 = ml^2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) \quad (9.a)$$

$$p_2 = ml^2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)) \quad (9.b)$$

Hamiltonian atau energi total yang dibangun dari persamaan. 8 adalah:

$$H = \frac{1}{2} ml^2 \frac{p_1^2 + 2p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos(q_1 - q_2)}{1 + \sin^2(q_1 - q_2)} + mgl(4 - 2\cos q_1 - \cos q_2) \quad (10)$$

Persamaan gerak dari Hamiltonian di atas diperoleh dengan menggunakan persamaan.3, sehingga dihasilkan empat persamaan diferensial non linier orde pertama yang terkopel, yaitu:

1980). Langkah-langkah untuk memperoleh persamaan gerak dari Gambar 1 adalah sebagai berikut. Empat koordinat kartesian  $(x_1, y_1, x_2, y_2)$  dari benda titik dapat diekspresikan oleh dua suku koordinat umum  $(\theta_1, \theta_2)$ , yaitu:

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1 \quad (5.a)$$

$$y_1 = 2l - l_1 \cos \theta_1 \quad (5.b)$$

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin \theta_2 \quad (5.c)$$

$$y_2 = 2l - l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 \quad (5.d)$$

$$\ddot{q}_1 = \frac{p_1 - p_2 \cos(q_1 - q_2)}{m l^2 [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]} \quad (11.a)$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{2p_2 - p_1 \cos(q_1 - q_2)}{m l^2 [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]} \quad (11.b)$$

$$p_1 = \frac{-p_1 p_2 \sin(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)] + [p_1^2 + 2p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos(q_1 - q_2)] [\sin(q_1 - q_2) \cos(q_1 - q_2)]}{m l^2 [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^2} - 2mg \sin(q_1) \quad (11.c)$$

$$p_2 = \frac{p_1 p_2 \sin(q_1 - q_2) [1 + \sin^2(q_1 - q_2)] + [p_1^2 + 2p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos(q_1 - q_2)] [-\sin(q_1 - q_2) \cos(q_1 - q_2)]}{m l^2 [1 + \sin^2(q_1 - q_2)]^2} - mg \sin(q_2) \quad (11.d)$$

### Penulisan Perangkat Lunak

Program simulasi yang dibuat merupakan penyelesaian numerik persamaan diferensial orde satu yang dirumuskan dalam persamaan (11.a) sampai dengan (11.d).

Penyelesaian dilakukan dengan integrasi numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde-4 (Press dkk, 1996., Gerald & Wheatley, 1994) dengan menetapkan ukuran ketelitian  $dt = 0.001$ . Algoritma yang dipergunakan adalah sebagai berikut:

Step 1. Ekspresikan persamaan gerak dalam bentuk

$$\dot{q}_1 = q_1(t, q_1, q_2, p_1, p_2)$$

$$\dot{q}_2 = q_2(t, q_1, q_2, p_1, p_2)$$

$$\dot{p}_1 = p_1(t, q_1, q_2, p_1, p_2)$$

$$\dot{p}_2 = p_2(t, q_1, q_2, p_1, p_2)$$

Step 2. Berikan kondisi awal  $q_{10}, q_{20},$

$p_{10}, p_{20}$  dan tetapkan ukuran ketelitian  $dt$ .

Step 3. Mulai sebuah loop

Step 4. Loop  $n$  kali

Step 5. Plot titik-titik  $(q_i, t), (q_i, p_i)$  dan  $(q_1, q_2)$ ; dengan  $i = 1, 2$ .

Step 6. Hitung:  $kq_1(i), kq_2(i), kp_1(i)$  dan  $kp_2(i)$ . Dari perumusan RK orde-4.

Step 7. Perbaharui  $q_1, q_2, p_1, p_2$ :

$$q_1 \leftarrow q_1 + [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \cdot \Delta t$$

$$q_2 \leftarrow q_2 + [l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4] \cdot \Delta t$$

$$p_1 \leftarrow p_1 + [m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4] \cdot \Delta t$$

$$p_2 \leftarrow p_2 + [n_1 + 2n_2 + 2n_3 + n_4] \cdot \Delta t$$

Step 8. Penambahan  $t$ :

$$t = t + \Delta t$$

Step 9. Akhir dari step 4 loop.

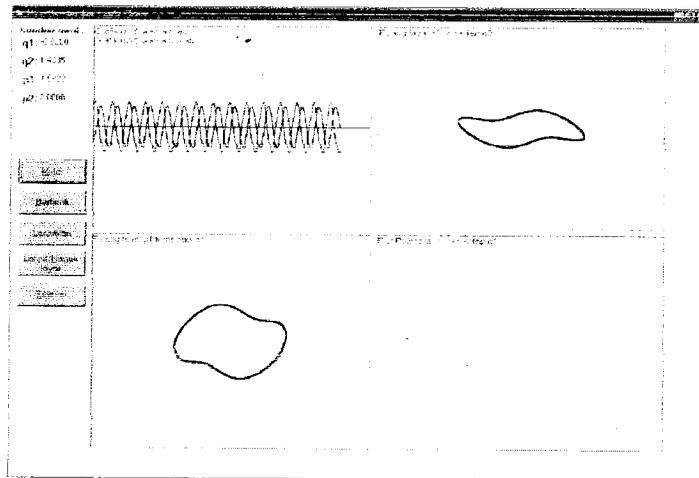
Step 10. Akhir dari step 3 loop.

Step 11. Selesai.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk meyakinkan bahwa perangkat lunak yang telah dibuat berjalan dengan benar, maka dilakukan validasi dengan mengeksekusi program pada kondisi awal tertentu (Srivastava, 1989). Kondisi awal  $q_1 = -0.822$ ,  $q_2 = 1.4335$ ,  $p_1 = 1.5422$ , dan  $p_2 = 0.0$ , diperoleh hasil seperti pada Gambar 2. Dapat diamati (a) trajektori  $q_i(t)$  berupa fungsi

sinusoidal yang periodik, (b dan d) plot ruang fasa  $p_i-q_i$  yang berupa kurva sangat tertutup, titik-titik pada ruang fasa akan kembali lagi kesuatu lintasan yang sama setelah suatu kali periode, (c) plot Poincare yang berupa sejumlah terbatas titik-titik (dalam kondisi ini berupa titik hampir 'tunggal'). Hal ini sesuai dengan salah satu referensi yang dipakai (Srivastava, 1989).



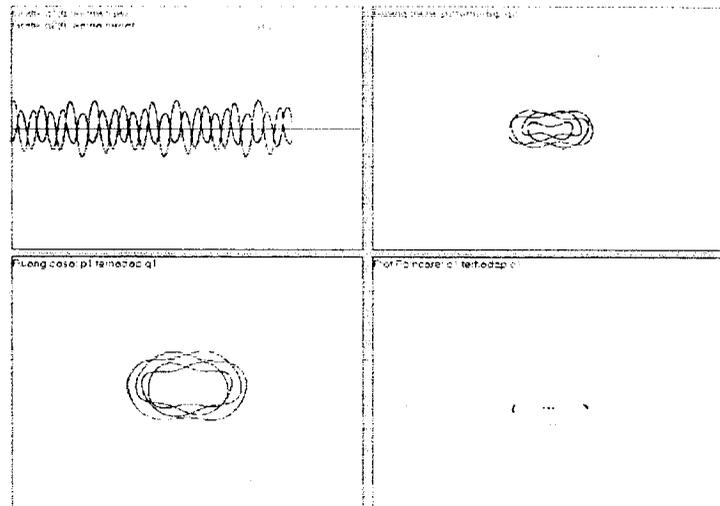
**Gambar 2.** Tampilan hasil eksekusi program. Dari kiri atas searah jarum jam: (a) grafik  $q_1$  dan  $q_2$  terhadap waktu (b) plot ruang fasa  $p_2-q_2$ , (c) plot Poincare  $p_1-q_1$ , (d) plot ruang fasa  $p_1-q_1$ .

Berikut ini dipaparkan hasil eksplorasi gejala chaos yang dapat muncul dengan menerapkan kondisi awal tertentu.

Pada Gambar.3 ditunjukkan hasil simulasi untuk kondisi awal  $q_1 = -0.65$ ,  $q_2 = 1.4$ ,  $p_1 = 0.6543$  dan  $p_2 = 0.0$ , kumpulan

kondisi awal ini bersesuaian dengan Hamiltonian atau energi  $E_0 \approx 3.2448$ .

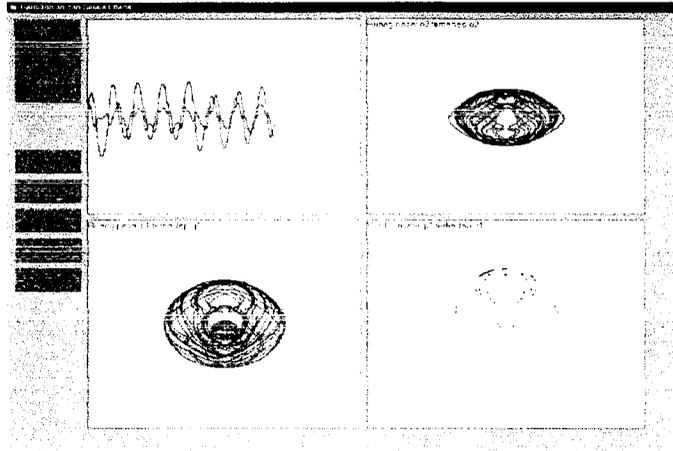
Gambar.3, jika diamati trajektori  $q_i(t)$  terlihat berjalan dengan pola yang periodik. Dapat diamati juga pada plot ruang fasa (b) dan (d), orbit trajektori berupa kurva tertutup quasiperiodik dengan lima periode gerak



**Gambar 3.** Hasil eksekusi program untuk kondisi awa  $q_1 = -0.65$ ,  $q_2 = 1.4$ ,  $p_1 = 0.6543$  dan  $p_2 = 0.0$ . Dari kiri atas searah jarum jam: (a) trajektori  $q_i(t)$ , (b dan d) plot ruang fasa  $p_i-q_i$  (c) plot Poincare  $p_1-q_1$ .

Setelah sistem bergerak dengan lima kali periode lintasan, titik-titik pada ruang fasa akan lewat pada salah satu lintasan tersebut. Pengamatan dapat lebih dipertajam dengan memperhatikan plot Poincare (Gambar 3.c), dari sini terlihat sejumlah titik terbatas, hal ini mengisaratkan sistem berperilaku periodik atau quasiperiodik.

Dalam Gambar 4., secara kualitatif terlihat trajektori  $q_i(t)$  berjalan tidak periodik. Dapat juga dilihat pada grafik berikutnya yaitu plot ruang fasa  $p_i-q_i$ , yang menunjukkan gejala chaos. Pengamatan lebih lanjut dapat dilakukan dengan memperhatikan plot Poincare, di sini nampak jelas titik-titik ruang fasa membentuk suatu pola tertentu yang indah.



Gambar 4. Hasil simulasi untuk kondisi awal:  $q_1 = 0.5236$ ,  $q_2 = 0.8727$ ,  $p_1 = 1$  dan  $p_2 = 1.5$ . Sistem yang menunjukkan gejala chaos.

## KESIMPULAN

1. Perangkat lunak yang dibuat telah dapat bekerja dengan baik.
2. Perangkat lunak ini dapat dipakai untuk mengeksplorasi sifat-sifat gerak dobel pendulum yang berperilaku periodik, quasiperiodik maupun yang menunjukkan gejala chaos.
3. Kondisi awal posisi dan momentum yang menyebabkan sistem menunjukkan gejala chaos, misalnya pada  $q_1 = 0,5236$ ,  $q_2 = 0,8727$ ,  $p_1 = 1,00$  dan  $p_2 = 1,50$ .

## DAFTAR PUSTAKA

- Gerald, C.F. & Wheatley, P.O. 1994. *Applied Numerical Analysis* 5<sup>th</sup> edition, Addison Wesley publishing company, New York.
- Goldstein, H. 1980. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, New York.
- Gould, H. & Tobochnik, J. 1996. *An Introduction to Computer Simulation Method Application to Physical System*. Addison-Wesley, Inc, New York.
- McCauley, J.L. 1997 *Classical Mechanics*, Cambridge University press, UK.
- Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., & Flannery, B.P. 1996. *Numerical Recipes in C* 2<sup>th</sup> edition. Cambridge U.P., New York.
- Rasband, S.N. 1997. *Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems*. John Wiley & Sons, New York.