Jurnal Penelitian Sains ; hal 92 - 102
No.9. April 2001 ISSN: 1410-7058

APLIKASI INTERPOLASI FUNGSI DUA PEUBAH DALAM TABEL FAKTOR PENDINGIN ANGIN

Sugandi Yahdin
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan menurunkan rumusan interpolasi fungsi dua peubah dengan studi kasus dalam faktor pendingin angin untuk menghitung nilai interpolasi dalam tabel faktor pendingin angin. Interpolasi Linier Fungsi Dua Peubah dan Interpolasi Lagrange Fungsi Dua Peubah untuk m=n=2 menghasilkan hasil dan kesalahan yang sama pada kasus Tabel Faktor Pendingin Angin. Interpolasi Lagrange dapat menghasilkan hasil yang lebih akurat dibandingkan dengan metode Interpolasi Linier karena m dan n dapat lebih besar dari dua, yang berarti lebih banyak menggunakan data. Interpolasi Linier mempunyai kesalahan relatif 5% sedangkan Interpolasi Lagrange yang menggunakan semua data mempunyai kesalahan relatif sebesar 0,74%.

I. PENDAHULUAN

Metode Interpolasi "tradisional" memiliki kekurangan, yaitu tidak dapat membuat polinom pencocok fungsi dua peubah yang paling sesuai dalam kasus dimana data percobaannya sangatlah kasar seperti temperatur semburan mesin jet, harga indeks bursa efek sebagai fungsi dua peubah atau lebih. Metode interpolasi tradisional seperti Interpolasi Linier, Interpolasi Kuadrat, dan Interpolasi Lagrange pada fungsi satu peubah memiliki galat yang cukup signifikan (Kreyszig, 1988).

Kehilangan panas dari permukaan badan manusia tidak hanya dipengaruhi oleh temperatur sekitarnya tetapi juga kecepatan angin. Pada suatu temperatur dan kecepatan angin tertentu, dimungkinkan untuk menghitung temperatur, dalam udara diam, yang nenghasilkan efek pendinginan ekuivalen. Hasil perhitungan semacam ini diberikan dalam *tabel pendinginan angin* yang diberikan oleh Environmental Science

Services Administration (ESSA) dari United States Department of Commerce. Dalam kasus ini terdapat dua peubah yaitu temperatur dan kecepatan angin.

Metode interpolasi merupakan salah satu metode numerik yang sering digunakan untuk menaksir nilai-nilai tertentu yang dibutukan di antara nilai-nilai hasil pengukuran yang diperoleh. Metode inipun memiliki kelebihan tertentu, baik keandalannya (reliability), maupun ketelitiannya (precision) dari metode lainnya yang telah ada sebelumnya.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Interpolasi Spline

Konsep splin berasal dari teknik menggambar dengan menggunakan lempengan yang fleksibel dan tipis (disebut splin), untuk menggambarkan kurva yang licin melalui sekumpulan titik. Dalam teknik ini, penggambar menaruh kertas di atas sebuah papan kayu, kemudian memukulkan paku atau penjepit di atas kertas (dan papan) pada lokasi titik-titik data. Sebuah kurva kubik yang halus dihasilkan di antara titik-titik penjepit. Jadi nama splin kubik diberikan untuk jenis polinomial demikian Chapra,S.C. dan Canale, R.P. (1991). Titik-titik penjepit ini kemudian disebut knot, yaitu titik-titik yang dilalui oleh dua fungsi pada suatu interval tertentu.

Ide penting dari interpolasi splin kubik adalah untuk menentukan satu interpolasi kubik potongan (*piecewise*) bagi f yang sehalus (*smooth*) mungkin pada interval [a,b]. Andaikan kita memiliki knot x_2, x_3, ...,x_n dan menyatakan interpolasi kubik potongan yang diinginkan dengan memenuhi S(x). Pada setiap subinterval $[x_i, x_{i-1}]$, $1 \leq i \leq n$, diperlukan S agar menjadi polinomial kubik yang memenuhi $S(x_i) = f(x_i)$, dan dapat menuliskan S pada subinterval $[x_i, x_{i+1}]$ (King, J. T; 1984) sebagai

$$S(x) = A_{1,i} + A_{2,i}(x-x_i) + A_{3,i}(x-x_i)^2 + A_{4,i}(x-x_i)^3,$$

di mana keempat koefisien $\{Ak,i\}^4_{k=1}$ akan ditentukan. Keempat koefisien ini secara tunggal ditentukan dengan memberikan nilai S pada 4 titik (yang berbeda) dalam subinterval $[x_i,x_{i+1}]$. Karena dibutuhkan untuk menginterpolasi f hanya pada dua titik dalam subinterval $[x_i,x_{i+1}]$ (pada titik-titik ujungnya), maka masih memiliki kebebasan untuk mempertimbangkan pembentukan S. Kebebasan tambahan ini digunakan untuk membuat S yang halus pada interval [a.b]. Satu interpolasi spline kubik S bagi f yang diperlukan harus memenuhi:

(i). $S(x_i) = f(x_i)$, $1 \leq i \leq n+1$, dimana $a = x_1 < x_2 < .... < x_{n+1} = b$

(ii). S adalah satu polinomial kubik dalam subinterval $[x_i , x_{i+1}]$

(iii) S sehalus mungkin dalam interval [a.b]; artinya, untuk sembarang $k \leq 0$; S, S', S'', . . . , S^k kontinu pada interval [a.b],

dengan S adalah satu polinomial kubik (pangkat tiga) tetapi mungkin S merupakan polinomial kubik yang berbeda pada setiap subinterval $[x_i,x_{i+1}]$, dengan $1 \leq i \leq n+1$.

2.1.1. **Interpolasi Splin Kubik Alami**

S dikatakan sebagai interpolasi splin kubik alami, ditulis $S_N(x)$, jika memenuhi syarat (i) sampai (iii), dan $S_N''(a) = S_N''(b)=0$.

2.1.2 **Interpolasi Splin Kubik Lengkap**

S dikatakan sebagai interpolasi splin kubik lengkap, ditulis $S_C(x)$, jika memenuhi syarat (i) sampai (iii), dan batasan titik-titik ujung $f'(a) = S'(a)$ dan $f'(b) = S'(b)$ dipenuhi, kemudian $f'(a)$ dan $f'(b)$ ada.

2.2. **Kajian Galat**

Galat numerik timbul dari penggunaan hampiran untuk menyatakan operasi dan besaran matematika yang pasti. Menurut Chapra (1985), galat meliputi galat pemotongan dan galat pembulatan. Tetapi apabila ditinjau dari sumber galatnya, dapat dibedakan menjadi galat percobaan, galat pemotongan, galat pembulatan dan galat pemrograman (Kreyszig,1988).

Secara umum, hubungan antara hasil sebenarnya dan nilai hampiran dapat dirumuskan sebagai :

Nilai Sebenarnya = Nilai Hampiran + Kesalahan

atau

$\in = a - \tilde{a}$ dengan $\in$ adalah galat dari nilai sebenarnya (a) dan nilai hampiran ($\tilde{a}$).

Scarborough (1966) memberikan hubungan antara galat dengan jumlah angka signifikan pada hampiran yaitu :

$\in_s = 0{,}5 \times 10^{2-n}$ % dengan n angka signifikan

Galat pembulatan dapat dikurangi dengan menggunakan aturan/kaidah pembulatan yang benar. Kaidah tersebut adalah buang desimal ke-(k+1) dan seterusnya. (a) Jika bilangan yang dibuang lebih kecil daripada setengah satuan di dalam desimal yang ke-k, biarkan desimal ke-k tidak berubah. (b) Jika bilangan yang dibuang itu lebih besar daripada setengah satuan di dalam desimal ke-k, tambahkan satu desimal ke-k. (c) Jika bilangan yang dibuang itu tepat setengah satuan, bulatkan ke desimal bulat terdekat.

Galat percobaan ialah galat yang dikandung oleh data yang digunakan, terjadi pada data yang diperoleh dari hasil percobaan.

Galat pemotongan ialah galat yang ditimbulkan akibat "memotong" suatu rangkaian langkah-langkah perhitungan yang diperlukan untuk menghasilkan nilai sebenarnya.

III. METODE PENELITIAN

3.1. Mengkaji teori mengenai metode Interpolasi.

3.2. Mengkaji penerapan metode interpolasi dalam kasus tabel faktor pendingin angin.

3.3. Menurunkan persamaan-persamaan interpolasi fungsi dua peubah dan penerapannya dalam tabel faktor pendingin angin.

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Studi Kasus Interpolasi Fungsi Dua Peubah dalam Tabel Faktor Pendingin Angin

Kehilangan panas dari permukaan tubuh manusia tidak hanya dipengaruhi oleh temperatur sekitarnya tetapi juga kecepatan angin. Sebagai contoh hilangnya panas pada 0^0 F dengan kecepatan angin 20 mph adalah ekuivalen dengan hilanya panas pada 40^0 F, udara diam.

Pada suatu temperatur dan kecepatan angin tertentu, dimungkinkan untuk menghitung temperatur, dalam udara diam yang menghasilkan efek pendinginan ekuivalen. Hasil perhitungan dan penelitian semacam ini diberikan dalam tabel pendinginan angin yang diberikan oleh Enviromental Science Services Administration (ESSA) dari United States

Departement of Commerce. Tabel tersebut diperlihatkan pada tabel 4.1 :

Tabel.4.1. Tabel Pendingin Angin

		Temperatur ^0F						
		-30	-20	-10	0	10	20	30
	0	-30	-20	-10	0	10	20	30
Kecepatan	10	-58	-45	-31	-22	-9	2	16
Angin	20	-81	-68	-52	-40	-24	-9	3
(mph)	30	-94	-78	-63	-49	-33	-18	-2
	40	-101	-87	-69	-54	-36	-22	-4
	50	-103	-88	-70	-56	-38	-24	-7

Sumber: Environmental Science Services Administration (ESSA), United States Departement of Commerce.

Untuk memperoleh temperatur udara diam ekuivelen dari tabel ini, letakkan temperatur sebenarnya dalam kolom yang bertanda temperatur dan kecepatan angin pada barisnya. Bilangan yang ada pada kolom dan baris tersebut adalah temperatur udara diam ekuivalen. Sebagai contoh, pada 10^0 F dengan kecepatan angin 20 mph, temperatur udara diam ekuivalen adalah -24^0 F.

4.2. Interpolasi Fungsi Dua Peubah untuk kasus Tabel Faktor Pendingin Angin

Misalnya ingin diketahui temperatur udara diam ekuivalen untuk 5^0 F dan kecepatan angin 15 mph. Bagaimana hasilnya dapat diperoleh dari tabel ? Untuk memperoleh jawaban tersebut diperlukan suatu pendekatan interpolasi fungsi dua peubah. Pertama akan dibatasi pada interpolasi linier. Kedua, akan diinterpolasi temperatur yang terdapat pada tabel terhadap kecepatan angin. Ini menghasilkan temperatur udara diam ekuivalen untuk

(1) kecepatan angin 15 mph dan temperatur udara sebenarnya 0^0 dan

(2) kecepatan angin 15 mph dan temperatur udara sebenarnya 10^0.

Hasil ini akan digunakan untuk interpolasi sekali lagi. Sekarang ini kecepatan angin konstan (15mph) dan akan diinterpolasi adalah temperaturnya.

Contoh Numerik:

Jika diinginkan temperatur udara diam ekuivalen 5^0 dan 15 mph

1) Cari dua tempertur yang membatasi 5^0, yaitu 0^0 dan 10^0. Untuk masing-masing temperatur ini diinterpolasi untuk mendapatkan tempereatur udara diam pada kecepatan angin 15 mph. Dalam kolom 0^0 dicari dua kecepatan angin yang membatasi 15 mph yaitu 10mph dan 20 mph. Karena 15 mph persis dipertengahan antara 10 mph dan 20 mph, hasil untuk 0^0 dan 15 mph adalah $\frac{(-40^0)+(-22^0)}{2} = -31^0$. Kemudian untuk 10^0, didapat bahwa 10 mph dan 20 mph membatasi 15 mph. Hasil interpolasi linier untuk 10^0 dan 15 mph adalah $\frac{(-24^0)+(-9^0)}{2} = -16{,}5^0$

2) Sampai titik ini, telah dihitung dua masukan, yaitu kecepatan angin 15 mph pada 0^0 dan 10^0. Karena 0^0 dan 10^0 membatasi 5^0, maka akan diinterpolasi sekali lagi. 5^0 adalah titik tengah antara 0^0 dan 10^0, sehingga hasil akhirnya adalah $\frac{(-16{,}5^0)+(-31^0)}{2} = -23{,}75^0$

Jadi temperatur udara diam pada 5^0 dan 15 mph adalah $-23{,}75^0$.

Harga sebenarnya adalah -25^0. Kesalahan relatifnya

$$\left|\frac{(-25^0)-(-23{,}75^0)}{-25^0}\right| x100\% = 5\%$$

4.2.1. Interpolasi Linier Fungsi Dua Peubah z=f(x,y)

Misalkan fungsi f(x,y) dengan dua peubah, x dan y. Misalkan selanjutnya fungsi ini, ditabelkan untuk m pada harga x; dan kemudian untuk setiap harga x ini, fungsi ditabelkan untuk n pada harga y, maka diperoleh mxn harga f . Dalam tabel 5.1 jika diambil x sebagai temperatur dan y sebagai

Jurnal Penelitian Sains ; hal 92 - 102
No.9. April 2001 ISSN: 1410-7058

kecepatan angin, maka m=7 dan n=6 sehingga ada 42 temperatur tercatat dalam tabel tersebut. Harga x dimana f(x,y) ditabelkan, diberi label $x_1, x_2, \dots x_m$. Serupa pula harga y diberi label $y_1, y_2, \dots y_n$.

Jika ingin dihitung harga fungsi f untuk $x = \bar{x}$ dan $y = \bar{y}$, pertama dicari harga x_i dan y_j yang membatasi $\bar{x}$ dan $\bar{y}$, yaitu:

$$x_{i-1} \le \bar{x} \le x_i$$
$$y_{j-1} \le \bar{y} \le y_j \tag{4.1}$$

dan mencatat harga dengan subscript i dan j. Untuk $x=x_{i-1}$, fungsi $f(x_{i-1},y)$ adalah fungsi satu variabel, y. Interpolasi secara linier untuk menaksir $f(x_{i-1}, \bar{y})$. Diperoleh:

$$f(x_{i-1},\bar{y}) = f(x_{i-1},y_{j-1}) + \frac{\bar{y}-y_{j-1}}{y_j - y_{j-1}}\left[f(x_{i-1},y_j) - f(x_{i-1},y_{j-1})\right] \tag{4.2}$$

Serupa untuk $x=x_i$, diinterpolasikan dan diperoleh :

$$f(x_i,\bar{y}) = f(x_i,y_{j-1}) + \frac{\bar{y}-y_{j-1}}{y_j - y_{j-1}}\left[f(x_i,y_j) - f(x_i,y_{j-1})\right] \tag{4.3}$$

Jika $y = \bar{y}$, maka $f(x, \bar{y})$ adalah fungsi satu variabel, x. Karena x_{i-1} dan x_i membatasi $\bar{x}$, dapat diinterpolasi $f(x, \bar{y})$ untuk menaksir $f(\bar{x}, \bar{y})$. Diperoleh :

$$f(\bar{x},\bar{y}) = f(x_{i-1},\bar{y}) + \frac{\bar{x}-x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\left[f(x_i,\bar{y}) - f(x_{i-1},\bar{y})\right] \tag{4.4}$$

4.2.2 Interpolasi Lagrange untuk Fungsi Dua Peubah

Untuk memperoleh ketelitian yang lebih tinggi, maka akan dibangun rumusan interpolasi lagrange untuk kasus tabel faktor pendingin angin.

Misalkan fungsi f(x,y) dengan titik data (x_i,y_j) (i=0,1,... M, j=0,1,...N) yang merupakan nilai fungsi dengan notasi f_{ij}. Sehingga diperoleh polinomial $p \in \Pi_{M,N}$ dengan derajat M pada x dan derajat N pada y yang memenuhi kondisi :

$$p(x_i, y_j) = f_{i,j} \qquad 4.5$$

Misalkan $\lambda_i(x)$ basis polinom lagrange untuk titik $x_0, x_1, \ldots x_m$,

$$\lambda_i(x_k) = \delta_{i,k} \qquad 4.6$$

dan $\mu_j(y)$ basis untuk titik $y_0, y_1, \ldots y_n$ sehingga

$$\mu_j(y_k) = \delta_{i,k} \qquad 4.7$$

Sehingga diperoleh polinomal :

$$\lambda_i(x) = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_m)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_m)} \qquad 4.8$$

dan

$$\mu_j(y) = \frac{(y-y_0)\ldots(y-y_{i-1})(y-y_{i+1})\ldots(y-y_n)}{(y_i-y_0)\ldots(y_i-y_{i-1})(y_i-y_{i+1})\ldots(y_i-y_n)} \qquad 4.9$$

Misalkan polinom $l_{i,j}(x,y)$ didapat dari

$$l_{i,j}(x,y) = \lambda_i(x)\mu_j(y) \qquad 4.10$$

sehingga

$$\begin{aligned} p(x,y) &= \sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{N} f_{i,j} l_{i,j} \\ &= \sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{N} f_{i,j}\lambda_i(x)\mu_j(y) \qquad 4.11 \\ &= \sum_{i=0}^{M}\lambda_i(x)\sum_{j=0}^{N} f_{i,j}\mu_j(y) \end{aligned}$$

4.2.3 Penerapan Interpolasi Lagrange untuk tabel Faktor Pendingin Angin

Misalkan X adalah peubah acak temperatur dan Y adalah peubah acak kecepatan angin dalam tabel faktor pendingin angin.

Ambil m=n=2, sehingga

$$\lambda_0 = \frac{(x-10)}{(0-10)} = \frac{x-10}{-10} \qquad \mu_0 = \frac{y-20}{10-20} = \frac{y-20}{-10}$$

$$\lambda_1 = \frac{(x-0)}{10-0} = \frac{x}{10} \qquad \mu_1 = \frac{y-10}{20-10} = \frac{y-10}{10}$$

$$p(x,y) = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} f_{i,j}\lambda_i(x)\mu_j$$

$$p(x,y) = (-22)\frac{x-10}{-10}\frac{y-20}{-10} + (-40)\frac{x-10}{-10}\frac{y-10}{10} + (-9)\frac{x}{10}\frac{y-20}{-10} + (-24)\frac{x}{10}\frac{y-10}{10}$$

$$p(5,15) = (-5{,}5) + (-10) + (-2{,}25) + (-6) = -23{,}75$$

Hasil yang diperoleh interpolasi lagrange dengan m=n=2 sama dengan interpolasi linier. Sehingga dengan memperbesar m dan n (m atau n) akan diperolah hasil yang lebih teliti karena titik yang digunakan lebih banyak.

Berikut semua data akan digunakan untuk menginterpolasi fungsi p(5,15), sehingga m=7 dan n=6 diperoleh:

$$\lambda_0(x) = \frac{(x+20)(x+10)(x-0)(x-10)(x-20)(x-30)}{(-30+20)(-30+10)(-30-0)(-30-10)(-30-20)(-30-30)}$$

$$\lambda_1(x) = \frac{(x+30)(x+10)(x-0)(x-10)(x-20)(x-30)}{(-20+30)(-20+10)(-20-0)(-20-10)(--20-20)(-32-30)}$$

$$\lambda_2(x) = \frac{(x+30)(x+20)(x-0)(x-10)(x-20)(x-30)}{(-10+30)(-10+20)(-10-0)(-10-10)(-10-20)(-10-30)}$$

$$\lambda_3(x) = \frac{(x+30)(x+20)(x+10)(x-10)(x-20)(x-30)}{(0+30)(0+20)(0+10)(0-10)(0-20)(0-30)}$$

$$\lambda_4(x) = \frac{(x+30)(x+20)(x+10)(x-0)(x-20)(x-30)}{(10+30)(10+20)(10+10)(10-0)(10-20)(10-30)}$$

$$\lambda_5(x) = \frac{(x+30)(x+20)(x+10)(x-0)(x-10)(x-30)}{(20+30)(20+20)(20+10)(20-0)(20-10)(20-30)}$$

$$\lambda_6(x) = \frac{(x+30)(x+20)(x+10)(x-0)(x-10)(x-20)}{(30+30)(30+20)(30+10)(30-0)(30-10)(30-20)}$$

dan

$$\mu_0(y) = \frac{(y-10)(y-20)(y-30)(y-40)(y-50)}{(0-10)(0-20)(0-30)(0-40)(0-50)}$$

$$\mu_1(y) = \frac{(y-0)(y-20)(y-30)(y-40)(y-50)}{(10-0)(10-20)(10-30)(10-40)(10-50)}$$

$$\mu_2(y) = \frac{(y-0)(y-10)(y-30)(y-40)(y-50)}{(20-0)(20-10)(20-30)(20-40)(20-50)}$$

$$\mu_3(y) = \frac{(y-0)(y-10)(y-20)(y-40)(y-50)}{(30-0)(30-10)(30-20)(30-40)(30-50)}$$

$$\mu_4(y) = \frac{(y-0)(y-10)(y-20)(y-30)(y-50)}{(40-0)(40-10)(40-20)(40-30)(40-50)}$$

$$\mu_5(y) = \frac{(y-0)(y-10)(y-20)(y-30)(y-40)}{(50-0)(50-10)(50-20)(50-30)(50-40)}$$

dengan menggunakan persamaan 4.11 diperoleh:

$$p(x,y) = \sum_{i=0}^{6}\sum_{j=0}^{5} f_{i,j} l_{i,j}$$

$$p(5,15) = \sum_{i=0}^{6}\sum_{j=0}^{5} f_{i,j} \lambda_i(x) \mu_j(y)$$

$$= \sum_{i=0}^{6} \lambda_i(x) \sum_{j=0}^{5} f_{i,j} \mu_j(y) = -24{,}81528309$$

Kesalahan relatifnya $\left|\frac{(-25^0) - (-24{,}81528309^0)}{-25^0}\right| x100\% = 5\%$

V. KESIMPULAN

1. Interpolasi Linier Fungsi Dua Peubah dan Interpolasi Lagrange Fungsi Dua Peubah untuk m=n=2 menghasilkan hasil dan kesalahan yang sama pada kasus Tabel Faktor Pendingin Angin.
2. Interpolasi Lagrange dapat menghasilkan hasil yang lebih akurat dibandingkan dengan metode Interpolasi Linier karena m dan n dapat lebih besar dari dua, yang berarti lebih banyak menggunakan data.
3. Interpolasi Linier mempunyai kesalahan relatif 5% sedangkan Interpolasi Lagrange yang menggunakan semua data mempunyai kesalahan relatif sebesar 0,74%.

DAFTAR PUSTAKA

Chapra,Steven.C and R.P Canale, *Numerical Methods for Engineer*, New York, Mc Graw-Hill,1985

Fletcher,A.,J.C.P. Miller, L.Rosenhead dan L.J. Comrie, *An Index of Mathematical Tables*, oxford, BlackWell, 1962

Fletcher,P.,H. Hoyle, W. Patty, *Foundations of Discrete Mathematics*, Boston, PWS- Kent Publishing Company,1991

Kamke,E.,*Differentialgleichengen, Losungsmethodem und Losungen I Gewohntiche Differentialgleichengen*, Ed ke-3, New York, 1948

Knuth,D.E, *The Art of Computer Programming, Vol 1, Fundamental Algorithm*, ed.2, Reading Mass Addison Wesley,1973

Kreyszig,E.*Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons,Inc,1988

Liu,C.L, *Dasar-dasar Matematika Diskret*, Alihbahasa Bambang Sumatri, ed. 2, Jakarta, Gramedia Pustaka Utama, 1995

Scarborough,J.B. *Numerical Mathematical Analysis*, Ed. 6, Baltimore, Johas Hopkins Press, 1966