Jurnal Penelitian Sains ; hal 27 - 37
No.5. April 1999 ISSN: 1410-7058

BEBERAPA ALTERNATIF UNTUK MENENTUKAN LUAS DAERAH DI BAWAH KURVA NORMAL

Robinson Sitepu
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya

ABSTRAK

Pada pengujian hipotesis yang berhubungan dengan distribusi normal, sering diperlukan beberapa besarnya kekeliruan α yang diperoleh. Karena tabel normal tidak tersedia dengan lengkap, maka diperlukan suatu teknik bagaimana caranya untuk menentukan peluang tersebut dengan menggunakan Calculator.

PENDAHULUAN

Untuk menguji sebuah rata-rata, kesamaan dua rata-rata jika σ diketahui atau menguji proporsi atau kesamaan dua porsi maka statistik uji yang dipergunakan adalah statistik Z.

Pada pengujian hipotesis tersebut sering diinginkan berapa besarnya nilai peluang. Untuk menentukan nilai peluang berarti kita harus mempergunakan atau melihat tabel normal baku, karena tabel normal baku tidak tersedia dengan lengkap untuk nilai peluang yang diinginkan. Sering sekali diambil harga yang mendekati, sehingga timbul pemikiran bagaimana caranya menentukan nilai peluang yang berada di bawah kurva normal tersebut. Dalam tulisan ini akan dibahas beberapa alternatif untuk menentukan luas daerah di bawah kurva normal dengan menggunakan Calculator.

METODOLOGI

1. Menginvetarisasi rumus-rumus yang akan dipergunakan.
2. Menghitung luas daerah di bawah kurva normal dengan rumus yang ada.
3. Membandingkan hasil dari setiap rumus yang ada.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk memperoleh luas daerah dibawah kurva normal, maka dilakukan suatu integrasi terhadap fungsi densitasnya, yaitu :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad ;-\sim<z<\sim \quad \text{atau}$$

$$L = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots * $$

Untuk menentukan luas daerah dibawah kurva normal dapat ditentukan dengan:

1. **Sitepu**

$$L = 0{,}5 - \exp\left[-(\frac{8}{9} + \frac{1}{3} z_\alpha)^3 \right]$$

Pendekatan di atas akan lebih baik jika :

$$L = 0{,}5 - \exp\left[-\left(\frac{8}{8{,}9847} + \frac{1}{3} z_\alpha \right)^3 \right]$$

Dalam bentuk komulatif dapat ditulis sebagai :

$$L = 1 - \exp\left[-\left(\frac{8}{8{,}9847} + \frac{1}{3} z_\alpha \right)^3 \right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Untuk membuktikan persamaan diatas dapat diperlihatkan sebagai berikut :

Dalil. Jika x merupakan perubah acak kontinu mengikuti distribusi χ^2 dengan derajad bebas dua maka :

$$\chi^2_{\alpha:2} = -2\ln\alpha$$

Bukti : $$f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right).2^{\frac{n}{2}}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$$

Untuk n = 2, maka: $f(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}$ sedangkan

$$\alpha = P(x > \chi^2_{\alpha;2})$$
$$= \int_{\chi^2_{\alpha;2}}^{n} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx$$
$$\alpha = \exp(-\frac{1}{2}\chi^2_{\alpha;2}) \quad \text{atau } \chi^2_{\alpha;2} = -2\ln\alpha$$

Dengan menggunakan transformasi Wilson-Hilberhg, yaitu:

$$\chi^2_{\alpha,n} = n\left[1 - \frac{2}{9n} + z\alpha\sqrt{\frac{2}{9n}}\right]^3$$

Untuk n = 2, maka

$$\chi^2_{\alpha;2} = 2\left[1 - \frac{1}{9} + z\alpha\frac{1}{3}\right]^3 \text{ .... Sit (1)}$$

Berdasarkan dalil telah diperlihatkan bahwa

$$\chi^2_{\alpha;2} = -2\ln\alpha \text{ .... Sit (2)}$$

Apabila persamaan Sit(1) disubstitusikan ke persamaan Sit (2), maka diperoleh

$$-2\ln\alpha = 2\left(\frac{8}{9} + \frac{1}{3}z\alpha\right)^3 \text{ atau } -\ln\alpha = 2\left(\frac{8}{9} + \frac{1}{3}z\alpha\right)^3 \text{ sehingga } \alpha = \exp\left(\frac{8}{9} + \frac{1}{3}z\alpha\right)^3$$

maka luas daerah di bawah kurva normal adalah

$$L = 1 - \exp\left[-\left(\frac{8}{9} + \frac{1}{3}z\alpha\right)^3\right]$$

Beberapa pendekatan lain untuk menentukan luas daerah di bawah kurva distribusi normal telah ditentukan oleh :

Jurnal Penelitian Sains ; hal 27 - 37
No.5. April 1999 ISSN: 1410-7058

2. Hasting

$$L = \frac{1-(at+bt^2+ct^3)}{\sqrt{2\pi}\exp(z^2/2)} \quad\text{.......................}\quad (2)$$

dengan

$$t = \begin{cases} \dfrac{1}{1+pz} & z > 0 \\ \dfrac{1}{1-pz} & z < 0 \end{cases}$$

p = 0,33267, a = 0.4361836, b = - 0,1201676, c = 0,9372980

3. Hoaglin

$$L = 1 - \frac{1}{2}\exp\left[\frac{-(83z+351)z+562}{\dfrac{703}{z}+165}\right] \quad\text{.......................}\quad (3)$$

4. **Pratt**

$$L = \begin{cases} 1-\left[\dfrac{1}{1+\exp\left[z(1{,}596+0{,}0722z^2)\right]}\right] & \text{.......................}\quad (4) \\ 1-\left[\dfrac{1}{\sqrt{(6{,}3z^2+10{,}6)\exp(z^2)}}\right] & \text{.......................}\quad (5) \end{cases}$$

5. **Norton**

$$L = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}\exp\left[-\left(\frac{z^2 + z}{2}\right)\right] & ; 0 \le z \le 2,6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6) \\ 1 - \frac{1}{2}\exp\left[-\left(\frac{z^2 + z^{0,8}}{2}\right)\right] & ; 0 \le z \le 2,7 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7) \\ 1 - \frac{\phi(z)}{z} & ; \text{untuk z yang besar} . \ (8) \end{cases}$$

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-z^2 / 2)$$

6. **Revfeim**

$$L = \frac{1}{1 + \exp(-2y)} \quad \text{dan} y = z\left(\sqrt{\frac{2}{\pi} + \frac{z^2}{28}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

7. **Shah**

$$L = \begin{cases} \frac{z(4,4 - z)}{10} & ; 0 \le z \le 2,2 \\ 0,49 & ; 2,2 \le z \le 2,6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10) \\ 0,50 & ; z > 2,6 \end{cases}$$

8. **Johnson-Kot**

$$L = 1 - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \exp(-z^2 / 2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

9. Mc Connell

$$L = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} (b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5) \quad \text{..............} \quad (12)$$

$b_1 = 0{,}319381530$; $b_2 = -0{,}356563782$; $b_3 = 1{,}781477937$

$b_4 = -1{,}821255978$; $b_5 = 1{,}330274429$

10. **Feller**

$$L = 1 - \phi(z) / z \text{ untuk } z \geq 3 \quad \text{..} \quad (13)$$

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2 / 2)$$

11. **Metode Numerik Simpson**

Bentuk persamaan *) dapat juga diselesaikan dengan mengunakan metode numerik yaitu dengan menggunakan aturan parabola atau aturan Simpson.

Langkah kerja :

1. Partisan selang [0,z] dibagi menjadi n selang bagian

; n bilangan positif, yaitu : $\overline{x_0 = 0} \quad \overline{x_1 \qquad\qquad\qquad x_{k-2}} \quad \overline{x_{k-1}} \quad \overline{z = x_n}$

dengan panjang $h = \frac{z-0}{n}$, dengan menggunakan titik-titik $0 = x_0 < x_1 < \ldots x_n = b$

Jurnal Penelitian Sains ; hal 27 - 37
No.5. April 1999 ISSN: 1410-7058

2. Pergunakan aturan Simpson atau Parabola yaitu

$$\int_0^z f(x)dx = \frac{h_0}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

dengan pola koefisien-loefisien 1, 4, 2, 4, 2, 4, 2,..., 2, 4, 1.

Misalnya:

a. $n = 2 \rightarrow h = \frac{z}{2}$

$$\underset{x_0}{}\overset{h}{\rule{2em}{0.4pt}}\underset{x_1}{}\overset{h}{\rule{2em}{0.4pt}}\underset{x_2}{} z$$

$$\int_0^z f(x)dx = \frac{z}{6}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

b. $n = 4 \rightarrow h = \frac{z}{4}$

$$\int_0^z f(x)dx = \frac{z}{12}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)$$

$$= \frac{z}{12} f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]$$

c. $n = 6 \rightarrow h = \frac{z}{4}$

$$\int_0^z f(x)dx = \frac{z}{18}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)$$

d. $n = k \rightarrow h = \frac{z}{k}$

$$\int_0^z f(x)dx = \frac{z}{3k}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + f(x_k)]$$

3. Tentu nilai tersebut dengam mengambil beberapa harga z dan fungsinya merupakan fungsi densitas distribusi normal baku, yaitu:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}x^2}$$

Dengan memakai beberapa harga z, dan harga z ini disubstitusikan pada persamaan 1 s/d 13, serta perhitungan secara numerik maka diperoleh hasilnya seperti pada Tabel-1:

Tabel 1
Luas Daerah Dari Distribusi Normal Standard Dalam Bentuk Kumulatif

Statistik	Nilai Persentil dari Distribusi Normal				
	1.28000	1.64500	1.9600	2.33000	2.58000
Hasting	0.89974	0.95002	0.97499	0.99009	0.99595
Hoagllin	0.89969	0.95000	0.97500	0.99010	0.99506
Pratt 3	0.89974	0.95011	0.97520	0.99036	0.99531
Pratt 4	0.90363	0.95085	0.97517	0.99010	0.99505
Norton 5	0.88379	0.94323	0.97251	0.98967	0.99506
Norton 6	0.89389	0.94712	0.97380	0.98983	0.99502
Norton 7	0.86262	0.93732	0.97018	0.98866	0.99445
Revfeim	0.89956	0.94993	0.97505	0.99026	0.99524
Shah	0.39936	0.45320	0.47824	0.48231	0.49000
McConne	0.89973	0.95002	0.97500	0.99001	0.99506
l	0.87390	0.93056	0.96192	0.98316	0.99095
Johnson	0.86262	0.93732	0.97018	0.98866	0.99445
Feller	0.89819	0.94911	0.97475	0.99027	0.99531
Sitepu	0.89973	0.95001	0.97500	0.99009	0.99499
Numerik	0.90000	0.95000	0.97500	0.99009	0.99500
Tabel					

Jurnal Penelitian Sains ; hal 27 - 37
No.5. April 1999 ISSN: 1410-7058

Apabila hasil yang diperoleh dibandingkan dengan nilai tabel, maka diperoleh hasilnya seperti pada Tabel-2. Apabila kita perhatikan hasil pada Tabel-2, maka perbedaan antara nilai pendekatan dengan nilai sebenarnya cukup kecil, tetapi bila dipandang dari bentuk perumusan yang diberikan ternyata ada beberapa perumusan yang masih cukup merepotkan untuk menghitung luas daerah (probability value) di bawah kurva normal dengan menggunakan calculator, misalnya perumusan yang diberikan oleh Hasting, McConnell dan secara numerik.

Tabel-2

	Nilai Persentil dari Distribusi Normal				
	1.2	1.645	1.96	2.33	2.58
Hasting	-0.00026	0.00002	-0.00001	0.00009	0.00095
Hoaglin	-0.00031	0.00000	0.00000	0.00010	0.00006
Pratt 4	-0.00026	0.00011	0.00020	0.00036	0.00031
Pratt 5	-0.00063	0.00085	-0.00017	0.00010	0.00005
Norton 6	-0.01621	-0.00677	-0.00249	-0.00033	0,00006
Norton 7	-0.00611	-0.00288	-0.00120	-0.00017	0,00002
Norton 8	-0.03738	-0.01268	-0.00482	-0.00134	-0.00055
Revfeim	-0.00044	-0.00007	-0.00005	0.00026	0.00024
Shah	-0.00064	0.00320	-0.00324	-0.00069	-0.00500
McConnel	-0.00027	0.00002	-0.00000	0.00001	0.00006
JoHnson	-0.02610	-0.01944	-0.01308	-0.00684	-0.00405
Feller	-0.03738	-0.01268	-0.00482	-0.00134	-0.00055
Sitepu	-0.00181	-0.00089	-0.00025	0.00027	0.00031
Numerik	-0.00027	0.00001	0.00000	0.00009	-0.00001

KESIMPULAN

Dari hasil perhitungan untuk menentukan luas daerah di bawah kurva normal dengan menggunakan Calculator, pergunakan perumusan yang diturunkan oleh Honglin, Pratt 4, Pratt 5, Norton 7 dan Sitepu karena perbedaan antara nilai pendekatan dengan nilai sebenarnya cukup kecil. Perumusan yang diturunkan oleh Hasting dan McConnel walaupun memberikan nilai perbedaan yang kecil dan penggunaan secara numerik cukup merepotkan.

Pendekatan yang diturunkan oleh Shah cukup baik untuk nilai persentil distribusi normal antara 0 sampai dengan 2,2.

DAFTAR PUSTAKA

Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, 1968, Vol.1, New York: John Willey.

Gupta, S.C and Kapoor, V.K., *Fundamentals of Mathematical Statistics*, 1982, Sultan Chad & Sons Publisher.

Hoaglin, D.C., Accuracy of Simple Approximation for Standart Normal Tail Areas, *The American Statistician*, Novenber 1989, Vol. 43, No. 4.289.

Johnson , N.L, dan Kotz, *Distributions in Statistics : Countinous Univariat Distribution-1* ,1970, New York: John Wiley.

Norton, R.M., The Pocket-Computer Approximation for Areas Under the Standart Curve, *The American Statistician*, 43, 24-26.

Revfeim, K.J.A,. More Approximations for the Cumulative and Inverse Normal Distribution, *The Americian Statistician*, Feberuary 1990, Vol.44, No.1,63.

Shah, A.K, A Simpler Approximation for Areas Under The Standard Normal Curve, *The American Statistician*, 1985, 39, 80.