Kekontinuan Fungsi Bervariasi Terbatas pada Ruang Euclide $\Re^n$

NOVI RUSTIANA DEWI
Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Sriwijaya, Indonesia

Intisari: Teori Integral Lebesgue dibangun oleh H. Lebesgue pada tahun 1902. Jika fungsi f terintegral Lebesgue pada interval $I = [a,b]$, maka f juga terintegral pada setiap interval bagiannya. Oleh karena itu terbentuk $F(x) = (L)\int_a^x f(t)d\mu$, untuk setiap $x \in I$, yang disebut primitif fungsi f. Primitif fungsi f pada suatu interval mempunyai sifat-sifat antara lain bervariasi terbatas dan kontinu mutlak. Penelitian ini mengkaji sifat kekontinuan fungsi bervariasi terbatas pada ruang Euclide $\Re^n$. Hasil penelitian menunjukkan bahwa setiap fungsi yang bervariasi terbatas tidak harus bersifat kontinu mutlak. Sebaliknya, setiap fungsi yang kontinu mutlak tidak harus bervariasi terbatas.

Kata kunci: integral lebesgue, variasi terbatas, kontinu mutlak

Abstract: The theory of Lebesgue integration is constructed on 1902 by H. Lebesgue. If the function f is Lebesgue integrated on interval $I = [a,b]$, so f will be integrated on every sub intervals. So we can perform $F(x) = (L)\int_a^x f(t)d\mu$, for every $x \in I$, which we can call primitive of f. Primitive of f on an interval will have certain properties such as bounded variation and absolutely continue. On this paper, we analyzed the continuity properties of bounded variation function on Euclidean space $\Re^n$. The research show that every bounded variation functions must not be absolutely continue. Otherwise, every absolutely continue functions must not be bounded variation.

Keywords: lebesgue integration, bounded variation, absolutely continue

1 PENDAHULUAN

Model matematika dalam kehidupan sehari-hari, khususnya pada bidang fisika dan teknik, pada umumnya berbentuk persamaan diferensial dan integral. Penyelesaian integral di bidang fisika maupun teknik masih banyak menggunakan konsep integral Riemann. Integral ini mempunyai kelemahan, antara lain bahwa fungsi yang terintegral Riemann hanya berupa fungsi yang terbatas dan kontinu hampir dimana-mana pada daerah integrasinya (Gordon, 1994). Kelemahan di dalam integral Riemann diperbaiki oleh Lebesgue yang membangun integral melalui pengertian dan sifat-sifat ukuran. Ternyata setiap fungsi yang terintegral Riemann akan terintegral Lebesgue pada interval yang sama, sebaliknya tidak selalu berlaku. Integral Lebesgue dikenal sebagai integral mutlak dalam arti fungsi f terintegral jika dan hanya jika $|f|$ terintegral. Mudah dicermati bahwa jika fungsi f terintegral Lebesgue pada suatu interval $I = [a,b]$, maka fungsi tersebut juga terintegral Lebesgue pada setiap interval bagiannya. Oleh karena itu terbentuk fungsi $F(x) = (L)\int_a^x f(t)d\mu$, untuk setiap $x \in I$, yang disebut primitif fungsi f.

Salah satu karakteristik primitif fungsi terintegral Lebesgue pada interval $[a,b] \subset \Re$ diberikan dengan pengertian kontinu mutlak. Pengembangan pengertian kontinu mutlak diikuti dengan pengembangan pengertian variasi terbatas.

Pengertian beserta sifat-sifat fungsi bervariasi terbatas dan fungsi kontinu mutlak pada garis lurus cukup banyak dijumpai dalam literatur-literatur bidang analisis khususnya bidang teori integral. Darmawijaya (2003) menganalisis beberapa sifat fungsi-fungsi interval yang bervariasi terbatas. Berdasarkan hal tersebut, peneliti tertarik untuk mengkaji keterkaitan antara fungsi bervariasi terbatas dengan fungsi kontinu mutlak.

2 TINJAUAN PUSTAKA

Himpunan semua bilangan real dan himpunan semua bilangan real yang diperluas berturut-turut dinotasikan dengan $\Re$ dan $\Re^*$. Telah diketahui bahwa

$$\Re^n = \{\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) : x_i \in \Re \text{ dan } 1 \le i \le n\}$$

Merupakan ruang Euclide terhadap operasi-operasi:

(i) Jumlahan

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$$

$$+(y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n)$$
$$\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \cdots, x_n + y_n)$$

(ii) Perkalian dengan skalar

$$\gamma\bar{x} = \gamma(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) \equiv (\gamma x_1, \gamma x_2, \gamma x_3, \cdots, \gamma\, x_n)$$

(iii) Operasi hasil kali dalam (*inner product*)

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \Re^n$ dan skalar γ. Selanjutnya, $\Re^n$ merupakan ruang bernorma terhadap norma $\|.\|_p$ $(1 \le p \le \infty)$:

$$\|\bar{x}\|_p = \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} |x_k|^p\}^{\frac{1}{p}}.$$

Ruang $\Re^n$ juga merupakan ruang bernorma terhadap norma $\|.\|_\infty$ dengan

$$\|\bar{x}\|_\infty = \text{maks}\{|x_k|: 1 \le k \le n\}.$$

uang bernorma $(\Re^n, \|.\|_p)$ dan ruang bernorma $(\Re^n, \|.\|_\infty)$ ekuivalen secara topologi. Hal ini merupakan salah satu alasan bahwa untuk selanjutnya $\Re^n$ dipandang sebagai ruang bernorma terhadap norma $\|.\|_\infty$. hal iniberakibat jarak (*metric*) antara dua titik atau dua vektor $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ dalam $\Re^n$ disajikan dengan

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\|_\infty = \text{maks}\{|x_k - y_k|: k = 1,2,3, \cdots n\}.$$

Selanjutnya dengan pengertian jarak antara dua titik tersebut di atas, jarak antara titik $\bar{x}$ dengan himpunan *A* adalah

$$d(\bar{x}, A) = inf\ \{d(\bar{x}, \bar{y}): \bar{y} \in A\}.$$

Suatu himpunan yang anggotanya hanya $\bar{x}$ ditulis dengan $\{\bar{x}\}$ dan disebut singleton. Jika *A* himpunan bagian tak kosong di dalam $\Re^n$, diameter himpunan *E* di dalam $\Re^n$ dilambangkan dengan *diam* (*E*) atau *d*(*E*) adalah

$$d(E) = diam(E) = sup\{d(\bar{x}, \bar{y}): \bar{x}, \bar{y} \in E\}$$

Untuk titik $\bar{x} \in \Re^n$, persekitaran (*neighbourhood*) titik $\bar{x}$ dengan jari-jari $\delta > 0$ dinotasikan dengan $N(\bar{x}, \delta)$, didefinisikan sebagai

$$N(\bar{x}, \delta) = \{\bar{y}; \bar{y} \in \Re^n \text{ dan } d(\bar{x}, \bar{y}) < \delta\}$$
$$= \{\bar{y}; \bar{y} \in \Re^n\ \ dan\ \|(\bar{x} - \bar{y}\,)\| < \delta\}$$

Himpunan semua penutup (*closure*) *E*, himpunan semua titik dalam (*interior point*) *E* dan himpunan semua titik batas (*boundary point*) *E* berturut-turut didefinisikan dengan

$$cl(E) = \bar{E} = \{\bar{x} \in \Re^n: \forall r > 0, N(\bar{x}, r) \cap E \neq \emptyset\}$$
$$Im(E) = E^o = \{\bar{x} \in \Re^n: \exists r > 0, N(\bar{x}, r) \subset E\}$$
$$\delta(E) = \{\bar{x} \in \Re^n: \forall r > 0, N(\bar{x}, r) \cap E \neq \emptyset\ dan\ N(\bar{x}, r) \cap \Re^n - E \neq \emptyset\}$$
$$= cl(E) \cap cl(E^c).$$

Lebih lanjut, $\Re^n$ merupakan ruang bernorma yang lengkap (*complete normed space*), dengan norma $\|.\|_\infty$.

Operasi hasil kali dalam di dalam $\Re^n$: $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$, mengakibatkan $\Re^n$ merupakan ruang Hilbert. Dengan demikian $\Re^n$ merupakan ruang Hilbert berdimensi hingga atas lapangan $\Re$ yang dikenal dengan ruang Euclide.

Jika $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ dan $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n)$ dua titik di dalam $\Re^n$, didefinisikan $\bar{a} < \bar{b}$ $(\bar{a} \le \bar{b})$ jika $a_i < b_i$ $(a_i \le b_i)$ untuk $i = 1,2,3, \cdots, n$. Jika $\bar{a} < \bar{b}$, himpunan $[\bar{a}, \bar{b}]$ disebut interval tertutup sejati (non degenerate closed interval) atau sel tertutup (closed cell), atau disebut sel (cell) saja. Jika tidak demikian, $[\bar{a}, \bar{b}]$ disebut interval degenerate. Mudah difahami bahwa sel E $= [\bar{a}, \bar{b}]$ dapat dinyatakan dengan $[a_1, b_1] x [a_2, b_2]\, x \cdots\ x [a_n, b_n]$ dengan $a_i < b_i$ untuk $i = 1,2,3, \cdots, n$. Suatu interval

$$E^0 = \textstyle\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i) \text{ dan } E = [\bar{a}, \bar{b}] = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$$

Berturut-turut merupakan interval terbuka dan sel. Dua interval atau sel dikatakan tidak saling tumpang tindih (*non overlapping*), jika irisan antara dua interior interval atau sel tersebut adalah himpunan kosong, tetapi jika tidak demikian dikatakan saling tumpang tindih (*overlapping*).

Definisi 2.1 Diberikan sel $E \subset \Re^n$.

1. Divisi pada sel E adalah koleksi berhingga sel $\mathfrak{D}$ yang tidak saling tumpang tindih dengan $\bigcup_{D \in \mathfrak{D}} D = E$.
2. Divisi parsial pada sel E adalah koleksi berhingga sel $\mathfrak{D}$ yang tidak saling tumpang tindih dengan $\bigcup_{D \in \mathfrak{D}} D \subseteq E$.
3. Partisi pada sel E adalah koleksi berhingga pasangan sel-titik $\mathfrak{D} = \{(D, \bar{x})\} = \{(D_1, x_1), (D_2, x_2), \cdots, (D_r, x_r)\}$ dengan $\{D_1, D_2, \cdots, D_r\}$ divisi pada *E* dan $x_i \in E$ untuk setiap *i*.
4. Segmentasi pada koleksi berhingga sel $\mathfrak{C}$ adalah koleksi berhingga sel-sel $\mathfrak{D}$ yang tidak saling tumpang tindih sehingga untuk setiap $D \in \mathfrak{D}$ termuat di dalam suatu $C \in \mathfrak{C}$ dan $\{D \in \mathfrak{D}: D \subset C\}$ adalah divisi pada C. Jadi

$$\bigcup_{C \in \mathfrak{C}} C = \bigcup_{C \in \mathfrak{C}} \bigcup_{D \subset C} D = \bigcup_{D \in \mathfrak{D}} D$$

(Pfeffer, 1993).

Selanjutnya diberikan definisi fungsi bervariasi terbatas dan fungsi kontinu mutlak pada ruang Euclide $\Re^n$.

Definisi 2.2 Diberikan sel $E \subset \Re^n$, $X \subset E$ dan fungsi interval $F: \mathcal{I}(E) \to \Re^*$.

1. Fungsi F dikatakan bervariasi terbatas pada X, jika ada bilangan $M \geq 0$ sehingga untuk setiap divisi parsial $\mathfrak{D} = \{D\} = \{D_1, D_2, D_3, \cdots, D_n\}$ pada E yang titik pangkal dan ujung setiap D_i anggota X berlaku
$$\mathfrak{D}\sum|F(D)| = \sum_{i=1}^{n}|F(D_i)| \leq M.$$
2. Fungsi F dikatakan bervariasi terbatas kuat pada X, jika ada bilangan $M \geq 0$ sehingga untuk setiap divisi parsial $\mathfrak{D} = \{D\} = \{D_1, D_2, D_3, \cdots, D_n\}$ pada E yang titik pangkal atau ujung setiap D_i anggota X berlaku
$$\mathfrak{D}\sum \omega(F; D) \leq M$$
dengan $\omega(F; D) = sup\{|F(J)|: J \text{ sel, dan } J \subseteq D\}$.

Koleksi fungsi interval bervariasi terbatas pada X dan koleksi fungsi interval bervariasi terbatas kuat pada X berturut-turut dinotasikan dengan $BV(X)$ dan $BV^*(X)$.

Definisi 2.3 Diberikan sel $E \subset \Re^n$ dan $X \subset E$. Variasi fungsi interval F pada sel X adalah bilangan
$$V_F(X) = sup\{\textstyle\sum_{D\in\mathfrak{D}}|F(D)|\},$$
dengan supremum diambil atas semua divisi parsial $\mathfrak{D} = \{D\} = \{D_1, D_2, D_3, \cdots, D_n\}$ pada E yang titik pangkal dan ujung para D_i anggota X.

Jika $V_F(X) \leq \infty$, maka fungsi interval F merupakan fungsi bervariasi terbatas pada X.

Definisi 2.4 Diberikan sel $E \subset \Re^n$, fungsi aditif $F: \mathcal{I}(E) \to \Re^*$ dan α volume pada E.

1. Fungsi F dikatakan kontinu mutlak-α pada $X \subset E$, dinotasikan dengan $F \in AC_\alpha(X)$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga berlaku
$$\mathfrak{D}\sum|F(D)| = \sum_{i=1}^{n}|F(D_i)| < \varepsilon$$
Untuk setiap divisi parsial $\mathfrak{D} = \{D\} = \{D_1, D_2, D_3, \cdots, D_n\}$ pada E yang titik pangkal dan ujung setiap D_i anggota X dengan
$$\mathfrak{D}\sum \alpha(D) = \sum_{i=1}^{n}\alpha(D_i) < \delta$$
2. Fungsi F dikatakan kontinu mutlak kuat-α pada $X \subset E$, dinotasikan dengan $F \in AC_\alpha^*(X)$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga berlaku
$$\mathfrak{D}\sum|F(D)| = \sum_{i=1}^{n}|F(D_i)| < \varepsilon$$
Untuk setiap divisi parsial $\mathfrak{D} = \{D\} = \{D_1, D_2, D_3, \cdots, D_n\}$ pada E yang titik pangkal atau ujung setiap D_i anggota X dengan
$$\mathfrak{D}\sum \alpha(D) = \sum_{i=1}^{n}\alpha(D_i) < \delta$$

(Dewi, 2003).

3 HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut ini diberikan sebuah teorema yang menyatakan hubungan antara fungsi yang kontinu mutlak dengan fungsi yang bervariasi terbatas pada ruang Euclide $\Re^n$.

Teorema 3.1 Diberikan sel $E \subset \Re^n$, $X \subseteq E$, fungsi interval $F: \mathfrak{I}(E) \to \Re^*$ dan α volume pada E. Jika $F \in AC_\alpha(X)$ maka $F \in BV(X)$, namun sebaliknya belum tentu berlaku.

Bukti: Diberikan $F \in AC_\alpha(X)$. Berdasarkan definisi 2.4 maka untuk bilangan $\varepsilon = 1$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga berlaku
$$\mathcal{A}\sum|F(A)| = \sum_{i=1}^{n}|F(A_i)| < 1$$
Untuk setiap divisi $\mathcal{A} = \{A\} = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ pada $X \subseteq E$ dengan
$$\mathcal{A}\sum \alpha(A) = \textstyle\sum_{i=1}^{n}\alpha(A_i) < \delta.$$
Jika $\mathfrak{D} = \{D\} = \{D_1, D_2, D_3, \cdots, D_n\}$ sebarang divisi pada X, diperoleh segmentasi $\mathfrak{C}$ pada $\mathcal{A} \cup \mathfrak{D}$. Selanjutnya dibentuk $\mathfrak{C}_i = \{C \in \mathfrak{C}: C \subset A_i\}$ untuk $i = 1,2,3, \cdots n$ dan $\mathfrak{C}_D = \{C \in \mathfrak{C}: C \subset D\}$ untuk setiap $D \in \mathfrak{D}$, diperoleh
$$\mathfrak{D}\sum|F(D)| = \mathfrak{D}\sum|\mathfrak{C}_D\sum F(C)| \leq \mathfrak{C}\sum|F(C)|$$
$$= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{C}_i\sum|F(C)| < \sum_{i=1}^{n}1 = n.$$
Karena $\mathfrak{D}$ sebarang divisi pada X, diperoleh $V_F(X) \leq n$, atau $F \in BV(X)$.

Sebaliknya, untuk membuktikan bahwa sebaliknya belum tentu berlaku, yaitu jika $F \in BV(X)$ maka belum tentu berlaku $F \in AC_\alpha(X)$, digunakan suatu contoh penyangkal. Untuk lebih memperjelas, contoh diberikan dalam $\Re$.

Contoh 3.2 Diberikan $F: [0,2] \to \Re$. Selanjutnya didefinisikan $F(x) = [\![x]\!]$, dengan $[\![x]\!]$ bilangan bulat terbesar yang tidak lebih dari x. Jelas F bervariasi terbatas pada $[0,2]$. Namun F tidak kontinu pada

[0,2], yang berakibat F tidak kontinu mutlak pada [0,2].

Contoh 3.2 menyatakan bahwa setiap fungsi yang bervariasi terbatas tidak harus kontinu mutlak, bahkan tidak harus kontinu. Demikian juga setiap fungsi kontinu, tidak harus bervariasi terbatas. Hal ini tertuang dalam contoh berikut.

Contoh 3.3 Diberikan fungsi $F: [0,1] \to \Re$. Selanjutnya didefinisikan:

$$F[x] = x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right), \text{jika } x \neq 0$$

$$F[x] = 0, \text{jika } x = 0.$$

Cukup jelas bahwa F kontinu, namun F tidak bervariasi terbatas pada [0,1], karena jika diambil $\left\{\left[\frac{2}{3}, 1\right], \left[\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{2}{7}, \frac{2}{5}\right], \cdots, \left[0, \frac{2}{2n+1}\right]\right\}$ divisi parsial pada [0,1], dengan n bilangan bulat positif, diperoleh:

$$\left|F(1) - F\left(\frac{2}{3}\right)\right| + \left|F\left(\frac{2}{3}\right) - F\left(\frac{2}{5}\right)\right| + \left|F\left(\frac{2}{5}\right) - F\left(\frac{2}{7}\right)\right| + \cdots + \left|F\left(\frac{2}{2n+1}\right) - F(0)\right|$$

$$= \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{2}{2n+1}\right)$$

$$= 4\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n+1}\right)$$

Karena $\sum_n \frac{1}{2n+1}$ divergen, maka jumlahan parsial menjadi tidak terbatas, sehingga mengakibatkan F tidak bervariasi terbatas.

Contoh 3.3 menyatakan bahwa ternyata setiap fungsi interval kontinu mutlak juga belum tentu bervariasi terbatas.

4 KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Dari hasil dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa untuk sel $E \subset \Re^n$, $X \subseteq E$, fungsi interval $F: \Im(E) \to \Re^*$ dan α volume pada E,

1. Jika $F \in AC_\alpha(X)$ maka belum tentu $F \in BV(X)$
2. Jika $F \in BV(X)$ maka belum tentu juga $F \in AC_\alpha(X)$

yang merupakan generalisasi dari sifat yang berlaku pada garis lurus.

Saran

Untuk penelitian lanjutan, disarankan untuk mengkaji aplikasi sifat-sifat fungsi yang kontinu mutlak dan sifat-sifat fungsi yang bervariasi terbatas di dalam ruang Euclide berdimensi n.

REFERENSI

Darmawijaya, S., 2003, On The Bounded Variation Functions, Proceeding of SEAMS GMU, International Conference on Mathematics ang its Applications,International Conference on Mathematics ang its Applications, Yogyakarta.

Gordon, R. A., 1994. The integral of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock, American Mathematical Society, USA.

Dewi, N. R., 2003. Fungsi Bervariasi Terbatas Pada Ruang Euclide $\Re^n$, Tesis Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

Pfeffer. W. F., 1993. The Riemann Approach to Integration, Cambridge University Press, New York, USA.