PERHITUNGAN TEMPERATUR PADA KONDUKSI 2D DENGAN MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA

Siti Sailah

Abstrak : *Penelitian ini membahas perpindahan panas secara konduksi yang dapat terjadi pada litosfer bumi. Asumsi-asumsi yang digunakan adalah sifat-sifat fisis bumi seperti konduktifitas termal dan densitas bersifat konstan dan perpindahan panas terjadi secara konduksi 2D pada pelat bujursangkar dengan. nilai-nilai temperatur pada setiap sisi diketahui yaitu batas atas T = 500°C, dan batas kiri/kanan/bawah T = 100°C. Metode pendekatan yang digunakan adalah metode beda hingga. Pelat dibagi atas kisi-kisi dengan 9 node(titik). Algoritma penyelesaian menggunakan metode Gauss- Seidel dan bahasa pemrograman menggunakan bahasa pemrograman Mathlab. Diperoleh temperatur setiap node (titik) adalah sebagai berikut :* T_1 *= 271,4286°C,* T_2 *= 310,7143°C,* T_3 *= 271,4286°C,* T_4 *= 175°C,* T_5 *= 200°C,* T_6 *= 175°C,* T_7 *= 128,5714°C,* T_8 *= 139, 2857°C, dan* T_9 *= 128,5714°C.*

Kata Kunci : *Konduksi 2D, Metode beda hingga, Metode Gauss- Seidel, Pemrograman Mathlab*

Abstract : *This Research discusses heat transfer in conduction that can happen at lithosphere earth. Assumptions that used is characteristics fisis earth like thermal Conductivity and density has the character of constant and heat transfer happens in conduction 2D at square plate with. temperature values on each side known that is upper limit T = 500oC, and left boundary/right/under T = 100oC. Approach Method that used is difference method till. Plate are divided to the grille with 9 nodes(dot). Solution Algorithm uses method Gauss- Seidel and programming language uses programming language Mathlab. Obtained/got temperature [of] every node (dot) shall be as follows : T1 = 271,4286oC, T2 = 310,7143oC, T3 = 271,4286oC, T4 = 175oC, T5 = 200oC, T6 = 175oC, T7 = 128,5714oC, T8 = 139, 2857oC, and T9 = 128,5714oC.*

Keyword : *Conduction 2D, Difference Method till, Method Gauss- Seidel, Programming Mathlab*

PENDAHULUAN

Salah satu peristiwa yang sangat umum dan sering terjadi dalam kehidupan sehari-hari adalah perpindahan panas. Panas berpindah dari benda yang bertemperatur tinggi ke benda yang bertemperatur rendah. Perpindahan panas tersebut dapat terjadi secara *konduksi, konveksi, radiasi dan adveksi.*

Semua aktifitas seperti pembentukan gunung, intrusi, gempa bumi, sedimentasi, erosi dan proses metamorfosa dikontrol oleh perpindahan panas dari dalam bumi. Di dalam bumi panas berpindah secara konduksi melalui litosfer atau kerak bumi. Konduksi adalah proses perpindahan panas melalui suatu material dengan cara interaksi atom-atom atau molekul-molekul dalam

✍ Siti Sailah , adalah Dosen Jurusan Fisika FMIPA Unsri

material tersebut. Di dalam litosfer, panas merupakan fungsi kedalaman dimana makin menjauh dari permukaan bumi maka panas makin meningkat.

Persoalan perpindahan panas secara konduksi pada litosfer merupakan suatu hal yang kompleks dimana variable-variabel konduktivitas panas, densitas bervariasi terhadap kedalaman. Sebagai tahap awal peneliti mencoba melakukan simulasi dengan model pelat 2D dengan variabel-variabel tersebut diatas dianggap konstan dan dalam keadaan tunak.

Berangkat dari persoalan diatas maka penelitian ini akan mencoba menerapkan metode *beda hingga (finite difference)* untuk menyelesaikan persoalan perpindahan panas secara konduksi 2D dalam keadaan tunak pada pelat bujursangkar. Karena persamaan perpindahan panas secara konduksi merupakan persamaan diferensial maka diharapkan metode ini merupakan metode yang tepat untuk memberikan solusi numerik. Metode ini diharapkan dapat menghitung distribusi temperatur setiap titik.

Konduksi 2D Keadaan Tunak

Perpindahan panas konduksi 2D dalam keadaan tunak akan memenuhi persamaan Laplace :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \qquad (1)$$

dimana konduktivitas panas konstan.

Laju panas yang berpindah secara konduksi melalui suatu zat padat sebanding dengan gradien temperatur. Gradien temperatur merupakan perbedaan temperatur per satuan panjang. Sehingga panas akan dikonduksi lebih cepat bila gradien temperaturnya kecil.

Perpindahan panas secara konduksi 2D dapat dihitung dari persamaan Fourier :

$$q_x = -kA_x \frac{\partial T}{\partial x} \qquad (2)$$

$$q_y = -kA_y \frac{\partial T}{\partial y} \qquad (3)$$

Besaran-besaran perpindahan panas mempunyai arah x atau arah y. Perpindahan panas total pada setiap titik dalam bahan itu merupakan resultan dari q_x dan q_y di titik itu.

Untuk menyelesaikan persamaan di atas digunakan metode pemisahan variable. Kunci dari metode ini adalah bahwa persamaan diferensial dapat dianggap mempunyai bentuk perkalian sebagai berikut :

$T = XY$

dimana $X = X(x)$ dan $Y = Y(y)$

Untuk menerapkan bentuk fungsi X dan Y harus diterapkan syarat batas seperti:

$T = T_1$ pada $y = 0$

$T = T_1$ pada $x = 0$

$T = T_1$ pada $x = W$

$T = T_m \sin(\pi x/W) + T_1$ pada $y = H$

Dimana T_m adalah amplitudo fungsi sinus. Dengan substitusi akhirnya didapat dua buah persamaan diferensial. :

$$d^2X/dx^2 + \lambda^2 X = 0 \qquad (4)$$

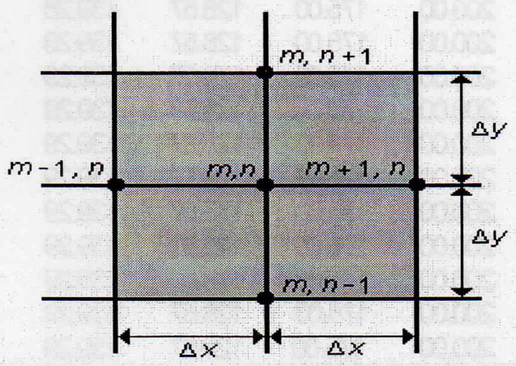
$$d^2Y/dy^2 + \lambda^2 Y = 0 \qquad (5)$$

dimana λ adalah konstanta separasi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian ini merupakan tahap awal pemelajaran persoalan perpindahan panas secara konduksi yang terjadi pada litosfer. Dengan asumsi-asumsi bahwa sifat-sifat fisis bumi seperti densitas, konduktivitas panas konstan, kasus perpindahan panas secara konduksi 2D disimulasi sebagai suatu kasus perpindahan panas konduksi 2D pada pelat bujursangkar dengan nilai-nilai temperatur pada setiap sisi-sisi diketahui.

Misalkan pelat bujursangkar tersebut seperti pada gambar berikut :



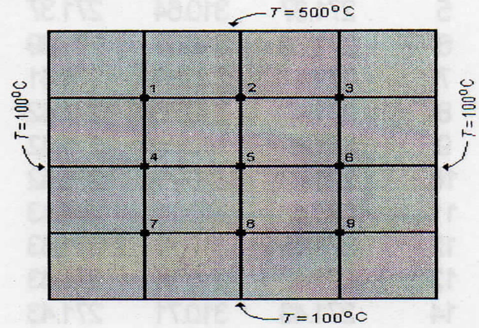
Gambar 1. Nomenklatur yang digunakan pada konduksi 2D

Pelat 2D dibagi atas sejumlah kisi-kisi dengan interval sama pada arah x dan y. Titik-titik node *m* menunjukkan arah x dan *n* pada arah y. Untuk menentukan temperatur setiap titik (node) maka digunakan persamaan (1). Karena persamaan (1) merupakan persamaan diferensial maka metode beda hingga (finite difference) merupakan metode yang tepat untuk mendekati penambahan diferensial pada koordinat ruang dan suhu. Makin kecil kisi-kisi yang dibuat maka makin baik pula pendekatannya untuk menentukan temperatur yang sebenarnya.

Dengan menerapkan metode beda hingga pada persamaan (1) diperoleh :

$$T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} = 0$$

Dalam penelitian ini, pelat dibagi atas sejumlah kisi-kisi dengan pendekatan 9 simpul (node). Nilai-nilai batas adalah sebagai berikut : batas atas T = 500°C, batas kiri, batas kanan dan batas bawah adalah sama yaitu T = 100°C.



Gambar 2. Pelat 2D dengan pendekatan 9 node

Dari model matematis diatas kita peroleh persamaan untuk masing-masing simpul :

$T_1 = ¼ (600 + T_2 + T_4)$

$T_2 = ¼ (500 + T_1 + T_3 + T_5)$

$T_3 = ¼ (600 + T_2 + T_6)$

$T_4 = ¼ (100 + T_1 + T_5 + T_7)$

$T_5 = ¼ (T_2 + T_4 + T_6 + T_8)$

$T_6 = ¼ (100 + T_3 + T_5 + T_9)$

$T_7 = ¼ (200 + T_4 + T_8)$

$T_8 = ¼ (100 + T_5 + T_7 + T_9)$

$T_9 = ¼ (200 + T_6 + T_8)$

Dengan menggunakan algoritma penyelesaian metode Gauss-Seidel, kita menetapkan perkiraan awal untuk $T_2 = T_3 = T_4 = T_5 = T_6 = T_7 = T_8 = T_9 = 0$. Metode menerapkan perhitungan secara iteratif dengan batas konvergensi tertentu. Hasil perhitungan dengan menggunakan bahasa pemrograman Mathlab seperti terlihat pada tabel berikut :

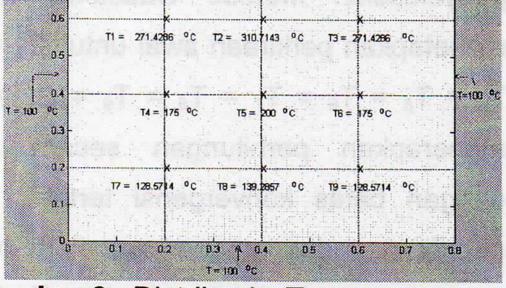
MENENTUKAN TEMPERATUR SETIAP TITIK PADA PLAT DUA DIMENSI BERBENTUK BUJUR SANGKAR SECARA NUMERIK DENGAN METODE BEDA
OLEH : SITI SAILAH

Interaksi ke	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9
	Dalam Satuan Derajad Celcius								
1	271.88	311.72	271.88	174.22	199.61	174.22	127.93	138.13	127.93
2	271.48	310.74	271.48	174.76	199.46	174.76	128.22	138.90	128.22
3	271.37	310.58	271.37	174.77	199.75	174.77	128.42	139.10	128.42
4	271.34	310.62	271.34	174.88	199.84	174.88	128.49	139.19	128.49
5	271.37	310.64	271.37	174.93	199.91	174.93	128.53	139.23	128.53
6	271.39	310.67	271.39	174.96	199.95	174.96	128.55	139.26	128.55
7	271.41	310.69	271.41	174.97	199.97	174.97	128.56	139.27	128.56
8	271.42	310.70	271.42	174.99	199.98	174.99	128.56	139.28	128.56
9	271.42	310.70	271.42	174.99	199.99	174.99	128.57	139.28	128.57
10	271.42	310.71	271.42	174.99	199.99	174.99	128.57	139.28	128.57
11	271.43	310.71	271.43	175.00	200.00	175.00	128.57	139.28	128.57
12	271.43	310.71	271.43	175.00	200.00	175.00	128.57	139.28	128.57
13	271.43	310.71	271.43	175.00	200.00	175.00	128.57	139.29	128.57
14	271.43	310.71	271.43	175.00	200.00	175.00	128.57	139.29	128.57
15	271.43	310.71	271.43	175.00	200.00	175.00	128.57	139.29	128.57
16	271.43	310.71	271.43	175.00	200.00	175.00	128.57	139.29	128.57
17	271.43	310.71	271.43	175.00	200.00	175.00	128.57	139.29	128.57
18	271.43	310.71	271.43	175.00	200.00	175.00	128.57	139.29	128.57
19	271.43	310.71	271.43	175.00	200.00	175.00	128.57	139.29	128.57
20	271.43	310.71	271.43	175.00	200.00	175.00	128.57	139.29	128.57
21	271.43	310.71	271.43	175.00	200.00	175.00	128.57	139.29	128.57

Tabel 1. Hasil perhitungan konduksi 2D Dengan Metode Gauss-Seidel

Dari tabel diatas terlihat bahwa konvergensi tercapai pada iterasi ke-21. Sehingga kita menggunakan nilai temperature pada iterasi ke-21 sebagai nilai hasil perhitungan.

Hasil perhitungan tersebut diplot seperti terihat pada gambar dibawah ini. Listing program terlampir.



Gambar 3. Distribusi Temperatur pada Konduksi 2D dengan Pendekat-an 9 Titik

KESIMPULAN

Dari hasil penelitian diperoleh bahwa perhitungan mencapai konvergensi pada iterasi ke-21 dengan nilai-nilai temperatur setiap titik adalah sebagai berikut : T_1 = 271,4286°C, T_2 = 310,7143°C, T_3 = 271,4286°C, T_4 = 175°C, T_5 = 200°C, T_6 = 175°C, T_7 = 128,5714°C, T_8 = 139, 2857°C, dan T_9 = 128,5714°C.

DAFTAR PUSTAKA

Basaruddin, T., 1994, *Metode Beda Hingga Untuk Persamaan Differensial*, PT. Elex Media Komputindo, 1994

Booton, Jr.R.C.,., 1992, *Computational Methods for Electromagnetics and Microwaves*, John Wiley & Sons, Inc., New York

Chapra, S.C., and Canale R.P., 1988, *Numerical Methods for Engineers*, McGraw-Hill, Company

Fowler, C.M.R., 1990, *The Solid Earth*, Cambridge University Press

G.D. Smith., 1995, *Numerical Solution of Partial Differential Equations; Finite Difference Methods*, 4th Ed, Oxford University Press, Oxford

Holman, J.P., *Perpindahan Kalor*, Penerbit Erlangga, 1997

Jessop, A.M., 1990, *Thermal Geophysics: Developments in solid earth geophysics*, 17, Elseiver Science Publ.

Maron, Melvin J., and Lopez, Robert J., 1990, *Numerical Analysis*, 3rd Ed,Wadsworth Publishing Co., California

Strikwerda, J. C., 1989, *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equation*, Wardsworth and Brooks, Belmont, California

Turcotte, D.L. & Schubert, G., 1982, *Geodynamics : Application of Continuum Physics to Geological Problems*, John Wiley & Sons, 1982

LISTING PROGRAM

```
disp('                                                              ')
disp('=====================================================================')
disp('==   MENENTUKAN TEMPERATUR SETIAP TITIK PADA PLAT DUA DIMENSI
BERBENTUK BUJUR SANGKAR    ==')
disp('==                    DENGAN METODE GAUSS-SEIDEL                ==')
disp('==                      0LEH : SITI SAILAH                       ==')
disp('=====================================================================')
epsilon = 0.0001;
x = 1;
% Perkiraan Awal Temperatur Pada Masing-Masing Titik :
T2 = 0;
T3 = 0;
T4 = 0;
T5 = 0;
T6 = 0;
T7 = 0;
T8 = 0;
Tt9 = 0;
disp('! Iterasi !  T1  !  T2  !  T3  !  T4  !  T5  !  T6  !  T7  !  T8  !  T9  !')
disp('!   ke :  !-----------------------------------------------------------------!')
disp('!         !                  Dalam Satuan Derajad Celcius                   !')
disp('!---------------------------------------------------------------------------!')
format short g
iterasi = 0;
iterasi = iterasi + 1;
T1 = 1/4*(600 + T2 + T4);
T2 = 1/4*(500 + T1 + T3 + T5);
T3 = 1/4*(600 + T2 + T6);
T4 = 1/4*(100 + T1 + T5 + T7);
T5 = 1/4*(T2 + T4 + T6 + T8);
T6 = 1/4*(100 + T3 + T5 + Tt9);
T7 = 1/4*(200 + T4 + T8);
T8 = 1/4*(100 + T5 + T7 + Tt9);
T9 = 1/4*(200 + T6 + T8);
```

```
x = abs(T9 - Tt9);
Tt9 = T9;
fprintf('!%5.0f    !%7.2f !%7.2f !%7.2f !%7.2f !%7.2f !%7.2f !%7.2f !%7.2f !%7.2f
!\n',iterasi,T1,T2,T3,T4,T5,T6,T7,T8,T9)
end
disp('===========================================================================')
% Gambar Distribusi Temperatur Pada Plat
% Gambar Distribusi Temperatur Pada Plat
x = 0 : 0.0005 : 0.8;
plot(x,y,'-')
v = [0 0.8 0 0.8];
Y = 0 : 0.001 : 0.8;
X1 = 0.2;
Y1 = 0.2;
Y2 = 0.4;
Y3 = 0.6;
plot(X1,Y,'-',X2,Y,'-',X3,Y,'-',X,Y1,'-',X,Y2,'-',X,Y3,'-')
axis(v);
text(0.14,0.55, num2str(T1))
text(0.24,0.56,'o')
text(0.253,0.55,'C')
text(0.3,0.55,'T2 =')
text(0.36,0.55, num2str(T2))
text(0.463,0.56,'o')
text(0.476,0.55,'C')
text(0.54,0.55,'T3 =')
text(0.59,0.55, num2str(T3))
text(0.693,0.56,'o')
text(0.705,0.55,'C')
text(0.15,0.35,'T4 =')
text(0.20,0.35, num2str(T4))
text(0.245,0.36,'o')
text(0.256,0.35,'C')
text(0.35,0.35,'T5 =')
text(0.40,0.35, num2str(T5))
text(0.445,0.36,'o')
text(0.458,0.35,'C')
text(0.55,0.35,'T6 =')
text(0.60,0.35, num2str(T6))
text(0.645,0.36,'o')
text(0.657,0.35,'C')
text(0.09,0.15,'T7 =')
text(0.14,0.15, num2str(T7))
text(0.24,0.16,'o')
text(0.253,0.15,'C')
text(0.31,0.15,'T8 =')
text(0.36,0.15, num2str(T8))
text(0.463,0.16,'o')
text(0.476,0.15,'C')
text(0.54,0.15,'T9 =')
text(0.59,0.15, num2str(T9))
text(0.693,0.16,'o')
text(0.705,0.15,'C')
text(-0.127,0.35,'T = 100')
text(-0.043,0.36,'o')
```

```
text(-0.032,0.35,'C')
text(-0.069,0.45,'------->')
text(-0.073,0.435,'|')
text(-0.073,0.41,'|')
text(-0.073,0.39,'|')
text(0.285,-0.08,'T = 100')
text(0.368,-0.07,'o')
text(0.378,-0.08,'C')
text(0.35,-0.04,'|')
text(0.35,-0.03,'|')
text(0.345,-0.02,'/')
text(0.352,-0.02,'\')
text(0.3,0.85,'T = 500')
text(0.384,0.86,'o')
text(0.395,0.85,'C')
text(0.35,0.82,'|')
text(0.345,0.81,'\')
text(0.352,0.81,'/')
text(0.807,0.4,'T=100')
text(0.873,0.41,'o')
text(0.884,0.4,'C')
text(0.8,0.45,'<---')
text(0.838,0.436,'\')
```