

# APLIKASI PERWARNAAN GRAF UNTUK MENENTUKAN KELOMPOK PERLAKUAN PADA RANCANGAN FRAKSI FAKTORIAL

Herlina Hanum

**Abstrak:** Rancangan fraksi faktorial merupakan rancangan percobaan yang hanya menggunakan sebagian (fraksi) dari semua perlakuan. Karena penelitian ini hanya untuk rancangan faktorial  $2^n$ , fraksi yang digunakan berbentuk  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$  dan seterusnya. Penggunaan fraksi  $\frac{1}{2}$  akan menghasilkan 2 kelompok perlakuan yang salah satunya akan diberikan pada unit percobaan. Dalam penelitian ini digunakan pewarnaan graf untuk menentukan kelompok-kelompok perlakuan tersebut. Langkah yang digunakan adalah menggambarkan seluruh perlakuan sebagai titik-titik dalam suatu graf. Garis dibuat untuk menghubungkan titik-titik yang berbeda hanya pada taraf dalam satu faktor. Kemudian titik-titik graf diberi warna berbeda sesuai banyaknya kelompok yang akan dibentuk. Titik yang terhubung oleh garis tidak boleh memiliki warna yang sama. Kelompok perlakuan akan didapat dengan melihat warna titik. Titik-titik berwarna sama akan bergabung dalam satu kelompok.

**Kata kunci :** Perlakuan, Fraksi Faktorial, Faktorial  $2^n$ , warna graf.

**Abstract :** Fractional factorial design is an experimental design that uses only fraction(s) of all treatments. Since this research only studied the  $2^n$  factorial design, it used only  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ , ...,  $\frac{1}{2^k}$  forms of fraction. The application of  $\frac{1}{2}$  fraction yields 2 groups of treatments which one of them was applied in the experiment. In this research, the graph colouring technique is used to determine the groups of treatments. The method is that to put all treatments as the vertices in a graph. The lines only connect pairs of vertices which are different only in the level of one factor. Then the vertices were denoted by certain colours according to the number of groups established. The connected vertices should not have the same colours. Vertices with the same colours join in a certain group.

**Key word :** treatment, fractional factorial, factorial  $2^n$ , graph colouring

## PENDAHULUAN

Dalam suatu percobaan, unit percobaan yang digunakan adalah banyaknya perlakuan dikalikan dengan banyaknya ulangan. Ulangan yang dilakukan biasanya lebih dari satu, yang paling umum digunakan adalah 3 kali ulangan. Hal ini untuk mengurangi resiko kegagalan percobaan dan untuk meyakinkan keabsahan pengujian data hasil percobaan. Penyediaan unit

percobaan seringkali terkendala oleh faktor pendanaan dan faktor teknis. Oleh sebab itu dalam percobaan diusahakan penggunaan rancangan yang efisien tetapi dapat menghasilkan informasi yang optimal tentang pengaruh perlakuan terhadap unit percobaan.

Salah satu cara efisiensi percobaan adalah dengan penggunaan rancangan fraksi replikasi atau ulangan sebagian

(*fractional replication*). Dalam rancangan ini, hanya digunakan fraksi ( $1/2$ ,  $1/3$ ,  $1/4$ ,  $1/8$ , ...) dari total perlakuan, untuk diberikan dalam percobaan. Hal ini dimungkinkan dengan membuat pasangan alias dari perlakuan dengan anggapan bahwa anggota setiap pasangan alias dapat mewakili pasangannya dalam analisis data. Anggapan ini dapat dibenarkan apabila penentuan pasangan alias mengikuti aturan yang sudah ditetapkan.

Dalam penentuan alias, biasanya digunakan sistem modulo. Bila rancangannya adalah faktorial  $2^n$ , maka digunakan modulo 2. Misalnya diambil penentu alias  $I = ABC$ , dengan  $I$  adalah tanpa pemberian faktor. Alias  $A$  ditentukan dengan mengalikan  $A$  dengan kedua ruas sehingga menjadi  $AI = AABC$ . Ruas kiri akan menghasilkan  $A$  dan ruas kanan dengan modulo 2 didapat  $BC$ . Dengan sistem modulo ini akan didapat semua pasangan alias. Tetapi kelompok perlakuan mana yang akan diberikan dalam percobaan masih perlu pemikiran lebih lanjut. Untuk itu diperlukan cara lain agar kelompok tersebut langsung dapat diketahui.

Salah satu cara penentuan kelompok perlakuan yang harus diberikan dalam percobaan adalah menggunakan warna graf. Graf yang dibentuk berupa himpunan titik yang mewakili perlakuan. Titik-titik perlakuan yang berasal dari faktor yang sama dihubungkan dengan garis. Dalam masalah ini pewarnaan dilakukan terhadap titik-titik. Penelitian ini bertujuan untuk

mengkaji pembentukan kelompok perlakuan menggunakan pewarnaan graf.

## METODE PENELITIAN

1. Mengkaji pembentukan perlakuan dari rancangan faktorial  $2^n$ .
2. Membuat graf dari semua perlakuan rancangan faktorial  $2^n$ .
3. Menerapkan pewarnaan graf pada graf perlakuan.
4. Menentukan kelompok perlakuan dari hasil pewarnaan graf.

Langkah 1 sampai 4 dilakukan untuk fraksi  $1/2$  dan  $1/4$  dari rancangan faktorial  $2^n$  dengan  $n = 3, 4$ , dan  $5$ .

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam tulisan ini semua faktor dilambangkan dengan huruf besar yaitu  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , dan  $E$ . Sementara taraf faktor diberikan dalam bentuk huruf kecil dengan indeks 0 untuk taraf rendah dan indeks 1 untuk taraf tinggi. Sebagai contoh simbol  $a_0$  untuk faktor  $A$  bertaraf rendah. Dalam kenyataannya seringkali taraf rendah untuk faktor dengan 2 taraf berarti tanpa pemberian perlakuan untuk faktor tersebut. Dengan demikian perlakuan  $a_0b_1c_1$  dapat ditulis dengan perlakuan  $BC$  atau pemberian faktor  $B$  dan  $C$ .

### 1. Pembentukan Perlakuan

Rancangan faktorial  $2^n$  berarti rancangan untuk percobaan dengan  $n$  faktor yang masing-masing memiliki 2 taraf. Perlakuan dalam rancangan ini adalah kombinasi dari taraf-taraf faktor yang

digunakan. Sebagai contoh, untuk percobaan faktorial  $2^2$ , perlakuan yang didapat adalah  $a_0b_0$ ,  $a_0b_1$ ,  $a_1b_0$ , dan  $a_1b_1$  atau I, B, A, dan AB. Jadi ada 4 perlakuan. Secara umum, banyak perlakuan untuk percobaan faktorial  $2^n$  adalah  $2^n$  perlakuan.

Dalam tulisan ini digunakan adalah 3, 4, dan 5 faktor. Rancangan faktorial dengan 3 faktor, yang dilambangkan dengan A,B, dan C, menghasilkan  $2^3 = 8$  perlakuan. Perlakuan tersebut adalah  $a_0b_0c_0$ ,  $a_0b_0c_1$ ,  $a_0b_1c_0$ ,  $a_0b_1c_1$ ,  $a_1b_0c_0$ ,  $a_1b_0c_1$ ,  $a_1b_1c_0$ , dan  $a_1b_1c_1$ . Bila faktor dengan taraf nol dianggap tanpa perlakuan faktor tersebut maka setiap perlakuan dapat ditulis dalam bentuk faktornya sebagai  $a_0b_0c_0=I$ ,  $a_0b_0c_1=C$ ,  $a_0b_1c_0=B$ ,  $a_0b_1c_1=BC$ ,  $a_1b_0c_0=A$ ,  $a_1b_0c_1=AC$ ,  $a_1b_1c_0=AB$ , dan  $a_1b_1c_1=ABC$ .

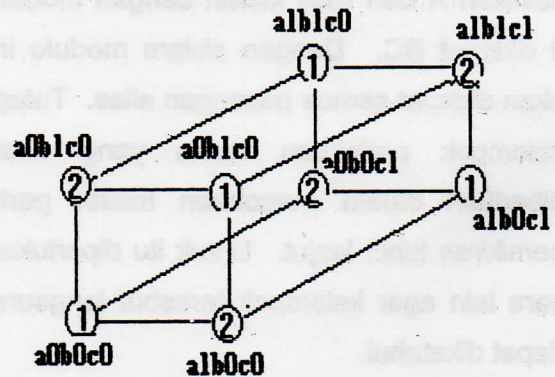
Rancangan dengan 4 faktor akan menghasilkan  $2^4= 16$  perlakuan. Perlakuan-perlakuan tersebut adalah I, A, B, C, D, AB, AC, AD, BC, BD, CD, ABC, ABD, ACD, BCD, dan ABCD. Bila digunakan rancangan faktorial  $2^5$  maka akan ada  $2^5 = 32$  perlakuan yaitu I, A, B, C, D, E, AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE, ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE, ABCD, ABCE, ABDE, ACDE, BCDE, dan ABCDE.

**2. Membuat graf dari semua perlakuan rancangan faktorial  $2^n$**

Graf dibuat berdasarkan jumlah titik dan garis-garis yang menghubungkan titik tersebut. Untuk masalah rancangan percobaan faktorial ini, titik-titiknya adalah setiap perlakuan yang dihasilkan dari kombinasi taraf faktor. Garis-garis yang

menghubungkan titik-titik hanya dibuat untuk pasangan titik yang hanya memiliki satu perbedaan taraf faktor.

Untuk rancangan dengan 3 faktor yang masing-masing memiliki 2 taraf, ada  $2^3 = 8$  titik. Sebagai contoh titik  $a_0b_0c_0$  dihubungkan oleh garis ke titik  $a_1b_0c_0$  karena kedua titik tersebut hanya berbeda di taraf faktor A yaitu  $a_0$  dan  $a_1$ . Demikian juga dengan pasangan titik  $(a_0b_0c_1, a_1b_0c_1)$ ,  $(a_0b_1c_0, a_1b_1c_0)$ , dan  $(a_0b_1c_1, a_1b_1c_1)$ . Sementara pasangan titik  $(a_0b_0c_0, a_0b_0c_1)$ ,  $(a_0b_1c_0, a_0b_1c_1)$ ,  $(a_1b_0c_0, a_1b_0c_1)$ , dan  $(a_1b_1c_0, a_1b_1c_1)$  dihubungkan oleh garis karena perbedaan taraf pada faktor C. Garis-garis lain dibuat untuk menghubungkan perlakuan yang berbeda hanya pada taraf faktor B. Graf untuk rancangan faktorial  $2^3$  disajikan dalam Gambar 1.



**Gambar 1.** Graf Rancangan Faktorial  $2^3$  dengan  $\frac{1}{2}$  Replikasi

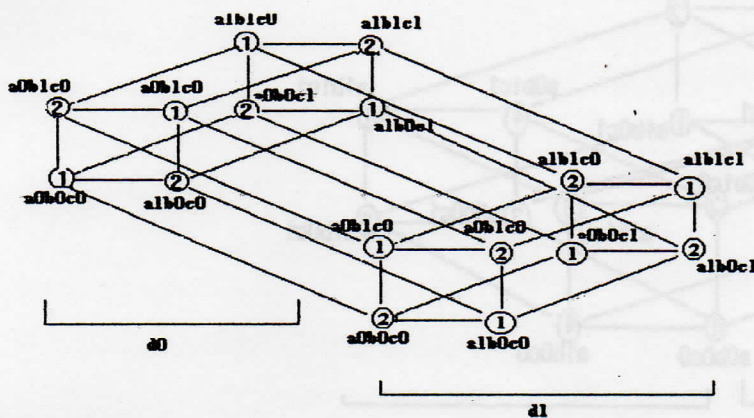
Graf yang terbentuk sebenarnya tidak harus berbentuk balok karena garis-garis yang menghubungkan titik-titik tidak harus berbentuk garis lurus. Sementara titik-titik juga tidak harus berjarak teratur melainkan dapat digambar sebarang. Graf tersebut

akan sama dengan graf manapun yang memiliki 8 titik asalkan pasangan titik yang dihubungkan oleh garis tetap sama.

Untuk rancangan  $2^4$ , dengan faktor A, B, C, dan D, graf yang dihasilkan memiliki 16 titik. Garis-garis dibuat untuk menghubungkan titik-titik yang berbeda hanya pada taraf faktor A, B, C, atau D saja. Titik-titik yang memiliki perbedaan taraf lebih dari satu faktor, tidak dihubungkan oleh garis.

Gambar 2 menyajikan 2 buah graf untuk rancangan faktorial  $2^4$ .

Walaupun faktor yang digunakan ada 4, tetapi grafnya tetap dapat digambarkan dalam 3 dimensi. Graf ini dapat saja dibuat dengan membuat 2 graf rancangan  $2^3$  masing-masing untuk taraf  $d_0$  dan  $d_1$  dari faktor D, lalu menghubungkan titik-titik yang sepadan (pada posisi sama dalam balok) pada kedua graf tersebut.



Gambar 2. Graf Rancangan Faktorial  $2^4$  dengan Fraksi  $\frac{1}{2}$

Graf untuk rancangan faktorial  $2^5$ , dengan faktor A, B, C, D, dan E, memiliki 32 titik. Graf ini dapat saja dibuat dengan menggambar 2 graf dari rancangan  $2^4$  kemudian menghubungkan titik-titik sepadan dari graf untuk taraf  $e_0$  dan  $e_1$ . Graf ini disajikan dalam Gambar 3 dan Gambar 4.

### 3. Menerapkan pewarnaan graf pada graf perlakuan

Pewarnaan graf merupakan salah satu dari aplikasi teori graf. Ada 2 cara pewarnaan yang dapat dilakukan yaitu mewarnai titik-titik atau mewarnai garis. Pewarnaan titik dilakukan jika ingin

mengelompokkan titik-titik berdasarkan kepentingan tertentu.

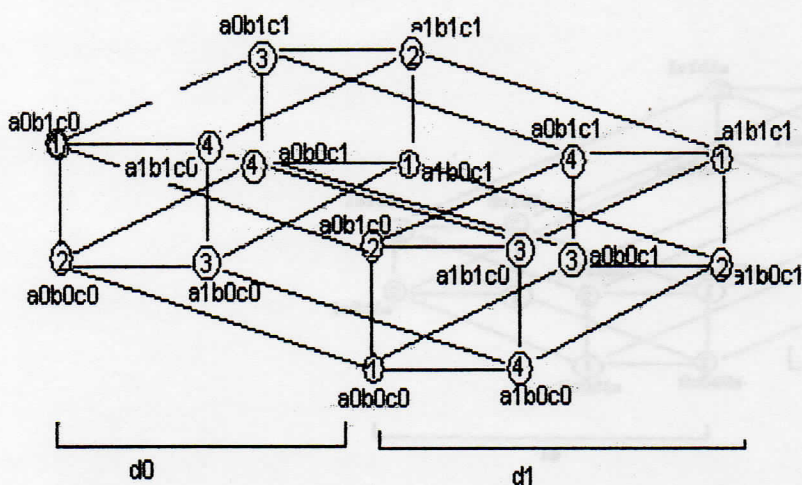
Sebaliknya jika ingin mengelompokkan garis maka garis-garisnya yang diberi warna. Pemberian warna pada titik-titik mengikuti aturan bahwa titik-titik yang bertetangga (*adjacent*), yaitu pasangan titik yang dihubungkan oleh garis, tidak boleh memiliki warna yang sama. Hal ini berarti tidak ada perlakuan yang berbeda hanya pada taraf salah satu faktor (misalnya taraf faktor C pada perlakuan  $a_0b_1c_1$  dan  $a_1b_1c_1$ ) yang termasuk dalam kelompok yang sama. Karena pasangan perlakuan tersebut tidak boleh sama-sama diberikan atau sama-

sama tidak diberikan dalam percobaan. Jumlah warna yang diberikan disesuaikan dengan jumlah kelompok yang diinginkan.

Untuk penentuan kelompok perlakuan yang akan diberikan dalam percobaan, jumlah warna yang diberikan sesuai dengan fraksi yang ingin diterapkan. Jika diambil  $\frac{1}{2}$  perlakuan atau fraksi  $\frac{1}{2}$  maka digunakan 2 warna.

Dengan demikian akan terbentuk 2 kelompok perlakuan yang dipisahkan oleh 2 warna berbeda. Demikian juga bila diambil fraksi  $\frac{1}{4}$  dengan menggunakan 4 warna.

Pewarnaan untuk fraksi  $\frac{1}{2}$  yang menggunakan 2 warna ( dalam gambar 3 digunakan nomor 1 dan 2) sangat mudah dilakukan.



**Gambar 3.** Gambar 3: Graf Rancangan  $2^4$  dengan Fraksi  $\frac{1}{4}$

Langkah pertama adalah memilih titik sebarang untuk diberi salah satu warna (misalnya warna 1). Kemudian titik-titik tetangganya diberi warna lainnya (warna 2). Selanjutnya titik-titik yang bertetangga dengan titik berwarna 2 diberi warna 1. Hal ini dilakukan sampai semua titik telah berwarna.

Bila langkah yang dilakukan benar maka tidak akan ada titik-titik bertetangga yang memiliki warna yang sama. Kemudian titik-titik yang bertetangga diberi warna lain. Pemberian warna untuk titik-titik tetangga dapat saja sebarang tetapi harus diperhatikan bahwa setiap warna harus

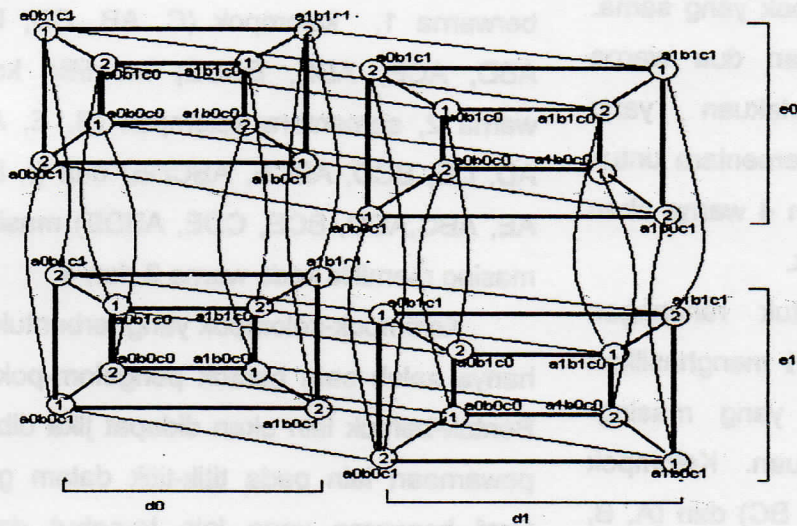
bertetangga dengan semua warna lain. Hal ini untuk menjamin bahwa pada pewarnaan titik terakhir semua warna telah mewarnai titik-titik dengan jumlah yang sama ( karena setiap kelompok perlakuan harus memiliki jumlah anggota yang sama) dan tidak ada dua titik bertetangga yang berwarna sama.

Kesulitan timbul pada pewarnaan balok ketiga dan terlebih lagi pada balok keempat. Pada langkah ini seringkali menemui hambatan untuk menempatkan warna pada suatu titik. Hal ini disebabkan warna yang dipilih untuk titik pada balok ketiga atau keempat akan sama dengan warna titik yang bertetangga pada balok

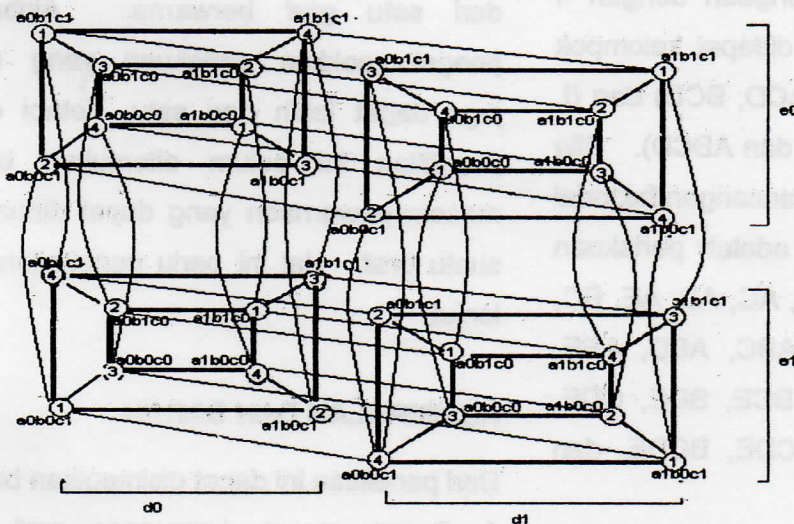
sebelumnya, sehingga pewarnaan pada balok kedua kadang harus diubah lagi agar graf dapat diwarnai sesuai persyaratan pewarnaan graf. Gambar 3 adalah salah satu cara pewarnaan Graf Rancangan  $2^4$

dengan fraksi  $\frac{1}{4}$ .

Sementara Gambar 5. merupakan salah satu bentuk pewarnaan untuk Graf Rancangan  $2^5$  dengan Fraksi  $\frac{1}{4}$ .



Gambar 4. Graf Rancangan  $2^5$  dengan Fraksi  $\frac{1}{2}$ .



Gambar 5. Graf Rancangan  $2^5$  dengan Fraksi  $\frac{1}{4}$ .

### 3. Menentukan Kelompok perlakuan dari hasil pewarnaan graf

Berdasarkan graf perlakuan yang sudah diwarnai, kelompok perlakuan dapat ditentukan hanya dengan melihat warnanya saja. Titik-titik yang memiliki warna yang sama, masuk dalam kelompok yang sama. Dengan fraksi  $\frac{1}{2}$  digunakan dua warna sehingga kelompok perlakuan yang terbentuk juga ada dua. Sementara untuk fraksi  $\frac{1}{4}$  yang menggunakan 4 warna akan membentuk empat kelompok.

Pewarnaan graf untuk rancangan faktorial  $2^3$  dengan fraksi  $\frac{1}{2}$  menghasilkan dua kelompok perlakuan yang masing-masing terdiri dari 4 perlakuan. Kelompok tersebut adalah (I, AB, AC, BC) dan (A, B, C, ABC). Percobaan dengan rancangan fraksi replikasi dapat memilih salah satu kelompok ini untuk diberikan pada unit percobaan. Untuk rancangan dengan 4 faktor dengan  $\frac{1}{2}$  replikasi didapat kelompok (A, B, C, D, ABC, ABD, ACD, BCD) dan (I, AB, AC, AD, BC, BD, CD dan ABCD). Bila digunakan fraksi  $\frac{1}{2}$  pada rancangan faktorial  $2^5$  kelompok yang didapat adalah perlakuan yaitu I, A, B, C, D, E, AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE, ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE, ABCD, ABCE, ABDE, ACDE, BCDE, dan ABCDE.

Dalam Rancangan faktorial  $2^4$  dengan fraksi  $\frac{1}{4}$  didapat 4 kelompok masing masing dengan warna 1, 2, 3, dan 4. Kelompok 1 terdiri dari perlakuan (B, D, AC, ABCD). Kelompok 2 berisi perlakuan I, ABC, BD, dan ACD. Sementara kelompok 3 berisi

perlakuan BC, A, ABD, dan CD dan kelompok 4 adalah AB, C, AD, dan BCD. Rancangan faktorial  $2^5$  dengan fraksi  $\frac{1}{4}$  didapat 4 kelompok yang masing-masing beranggota 8 perlakuan. Kelompok (A, D, BC, CE, ABE, BDE, ABCD, ACDE) yang berwarna 1, kelompok (C, AB, CD, BE, ABD, ACE, ADE, BCDE) memiliki kode warna 2, sementara kelompok (B, E, AC, AD, DE, BCD, ABCE, ABCDE) dan (I, BD, AE, ABC, ACD, BCE, CDE, ABDE) masing-masing memiliki kode warna 3 dan 4

Kelompok-kelompok yang terbentuk ini hanya salah satu bentuk pengelompokan. Bentuk-bentuk lain akan didapat jika dibuat pewarnaan lain pada titik-titik dalam graf. Graf berwarna yang lain tersebut dapat dibuat dengan mengikuti aturan pewarnaan graf. Karena aturan tersebut tidak ketat maka untuk suatu graf dapat dibuat lebih dari satu graf berwarna. Akibatnya, pengelompokan perlakuan yang dibuat juga dapat lebih dari satu. Tetapi dalam penelitian ini belum ditentukan berapa macam pewarnaan yang dapat dibuat dari suatu graf. Hal ini perlu pengkajian lebih lanjut.

### KESIMPULAN DAN SARAN

Dari penelitian ini dapat disimpulkan bahwa

1. Secara umum pewarnaan graf dapat digunakan untuk menentukan kelompok perlakuan pada rancangan fraksi faktorial.
2. Jumlah kelompok yang terbentuk akan sama dengan ( $1/\text{fraksi}$ ).

3. Pengelompokan ditentukan berdasarkan warna titik dalam graf perlakuan.
4. Masalah yang perlu dicermati adalah pewarnaan titik-titik dalam graf sedemikian sehingga tidak ada pasangan titik bertetangga memiliki warna sama dan jumlah anggota setiap kelompok harus sama.

Penelitian ini belum mempertimbangkan pasangan alias perlakuan, sehingga disarankan untuk menerapkan pewarnaan graf dengan berdasarkan penentuan alias perlakuan. Penelitian lebih lanjut juga disarankan untuk dapat menentukan banyaknya pewarnaan yang dapat dilakukan untuk suatu graf dengan jumlah titik dan jumlah warna tertentu.

#### DAFTAR PUSTAKA

- Chartrand, G and O.R. Oellermann. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. McGraw-Hill Inc. New York.
- Draper, N, and H. Smith, 1992, *Analisis Regresi Terapan* edisi kedua (Terjemahan oleh Bambang Sumantri), Gramedia, Jakarta.
- Harary, F. 1972, *Graph Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc Reading, Massachussets
- Hanum, H, 2008, *Aplikasi Perwarnaan Graf Untuk Menentukan Kelompok Perlakuan Pada Rancangan Fraksi Faktorial*, Penelitian Mandiri, Universitas Sriwijaya
- Montgomery, D.C. 2001, *Design and Analysis of Experiments*, 5<sup>th</sup> ed, John Wiley & Sons, New York.
- Petersen, R.G. 1985, *Design and Analysis of Experiments*, Marcel Dekker, Inc, New York.