PENERAPAN KONTROL OPTIMAL DALAM MASALAH PEMINIMUMAN ENERGI YANG TERBUANG PADA SUATU RANGKAIAN LISTRIK
(The Application of Optimal Control in Minimization of energy dissipated in a electrical circuit)

Endro S Cahyono

***Abstract** : The Optimal Control Problem frequently rise in real problem. In this article is analyzed the minimization of energy dissipated in a resistor component r (r = value of resistance) of electrical circuit which consist of one component r , one capasitor c (c = value of capasitance) which connected by current i(t) and voltage source v(t). If $v(0) = v_0$ dan $v(t_1) = v_1$ then the control system models for the problem is $\dot{v} = \frac{1}{c} i(t);$, with i(t) as a control. Performance functional for energy dissipated in the resistor r over the interval $0 \le t \le t_1$ is $d = \int_0^{t_1} r i^2(t) dt$. In order energy dissipated in the resistor r minimum, so the control is $i(t) = i_0(t) = +(c/t_1)(v_1 - v_0)$ (constant). Then, if the circuit as an energy stored device and if v(0) = 0 then it can be determined . Efficiency rate (Ratio of the energy stored over the energy delivered) in this circuit is $\frac{1}{1+\frac{2rc}{t_1}}$.*

Keywords : *Optimal Control, energy dissipated, resistor, minimization*

PENDAHULUAN

Persoalan Kontrol Optimal telah menarik perhatian yang sangat besar selama dasa warsa terakhir sebagai akibat meningkatnya kebutuhan sistem dengan penampilan tinggi disamping tersedianya fasilitas komputer digital.

Banyak permasalahan nyata yang dapat dimodelkan dalam bentuk Persoalan Kontrol Optimal. Diantaranya adalah Masalah Peminimuman Energi yang Terbuang (energy dissipated) dalam suatu komponan tahanan listrik (resistor) r dari suatu rangkaian listrik dan pemodelan gerak linier dari suatu automobil. Dalam tulisan ini dikaji masalah peminimuman energi terbuang dalam suatu komponen tahanan listrik r. Salah satu metoda yang dapat menyelesaikan permasalahan tersebut adalah Metoda Kuadrat Terkecil (Least Square Method).

METODOLOGI

Adapun langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah diatas adalah

1. Diberikan suatu masalah fisis pada rangkaian listrik sederhana (terdiri dari

✉ Endro S Cahyono, adalah Dosen Jurusan Matematika FMIPA UNSRI.

satu komponen r, satu kapasitor c (c = nilai kapasitansi) yang dihubungkan dengan satu sumber arus i(t) dan sumber tegangan v(t) dengan $v(0) = v_0$ dan $v(t_1) = v_1$

2. Mengkaji pembentukan sistem kontrol linier dan pembentukan fungsional performansi untuk energi yang terbuang dalam suatu komponen tahanan r , sehingga terbentuk Persoalan Kontrol Optimal masalah peminimuman energi yang terbuang.
3. Mendapatkan suatu kontrol u(t) = i(t) yang meminimumkan fungsional performansi untuk energi yang terbuang dalam suatu komponen tahanan r dengan menggunakan metoda Least Square.
4. Jika rangkaian listrik dianggap sebagai alat penyimpan energi maka akan didapatkan tingkat efisiensi alat tersebut.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pernyataan Permasalahan Kontrol Optimal

Persoalan Kontrol Optimum cukup beragam jenisnya tergantung dari bentuk Indeks Performansi (Indeks Penampilannya). Salah satu Persoalan Kontrol Optimum yang menarik adalah pengoptimalan suatu Fungsional Performansi yang bentuk umumnya sebagai berikut :

$$\eta = \int_{t_0}^{t_1} (x'(t)L(t)x(t) + u'(t)u(t)dt; \text{ L Simetrik}$$

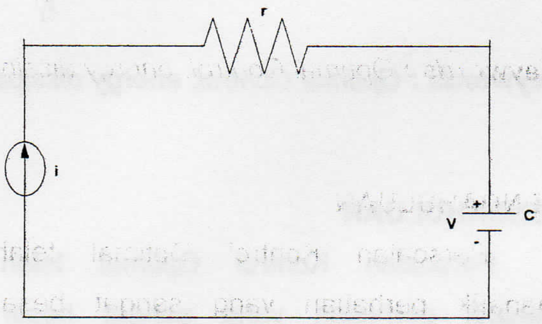
Dan jika L = 0 maka Indeks Performansi menjadi $\eta = \int_{t_0}^{t_1} u'(t)u(t)dt$

Adapun Bentuk Umum sistem kontrol adalah

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t); x(t_0) = x_0$$

Juga diberikan Himpunan yang memuat $x(t_i)$.

Adapun Pokok Permasalahannya adalah mendapatkan suatu fungsi kontrol **u** yang terdefinisi pada interval $t_0 \le t \le t_1$ sedemikian hingga **u** meminimumkan η dan memenuhi kondisi batas. Sekarang akan dikaji permasalahan nyatanya dalam rangkaian listrik. Adapun rangkaian listrik yang dicoba dikaji/ dianalisis seperti gambar adalah rangkaian listrik yang terdiri dari satu komponen r, satu kapasitor c (c = nilai kapasitansi) yang dihubungkan dengan satu sumber arus i(t) dan sumber tegangan v(t). Jika $v(0) = v_0$ dan $v(t_1) = v_1$



Gambar Rangkaian Listrik

Berdasarkan Prinsip Fisika jika arus listrik suatu rangkaian i maka tegangan listrik v yang melalui resistor R adalah v = iR, melalui induktor L yaitu $v = \frac{d}{dt}Li$ dan melalui kapasitor c yaitu $\frac{d}{dt}cv(t) = i(t)$. Berdasarkan prinsip diatas maka persamaan gerak untuk rangkaian listrik sebagaimana ditunjukkan dalam gambar diatas adalah

$$\frac{d}{dt}cv(t) = i(t); \qquad (1)$$

c = nilai kapasitansi dan i(t) aliran yang keluar dari sumber.

Persamaan Diferensial (1) jika ditulis dalam bentuk baku sistem kontrol linier

$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t);$ adalah $\dot{v} = \frac{1}{c} i(t);$

Disini A matriks nol x(t) = v(t), B = 1/c dan u(t) = i(t). Energi yang terbuang melalui resistor atas interval $0 \le t \le t_1$ adalah

$$d = \int_0^{t_1} ri^2(t)dt;$$ r = nilai resistansi

Misal diinginkan untuk mendapatkan aliran listrik i(t) sebagai fungsi dari waktu sedang $v(0) = v_0$, $v(t_1) = v_1$, sedemikian hingga energi yang terbuang dalam resistor adalah minimum. Meminimumkan d identik dengan meminimumkan

$$\int_0^{t_1} i^2(t)dt;$$

C2. Penerapan Metoda Least Square untuk menganalisis/ menyelesaikan masalah.

Akan diproses pembentukan kontrol optimumnya berdasarkan teorema berikut :

Teorema 1. (Brockett, 1970)

Andaikan A dan B matriks yang diberikan dan W keterkontrolan Gramian untuk sistem

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t);$$

Jika u_0 sembarang kontrol berbentuk

$$u_0(t) = -B'(t)\Phi'(t_0,t)\xi$$

Dimana ξ memenuhi $W(t_0,t_1)\xi = x_0 - \Phi(t_0,t_1)x_1$

Maka kontrol u_0 membawa sistem dari x_0 pada $t = t_0$ ke x_1 pada $t = t_1$ dan jika u_1 sembarang kontrol lain yang membawa sistem dari x_0 pada $t = t_0$ ke x_1 pada $t = t_1$ maka

$$\int_{t_0}^{t_1} u_1'(t)u_1(t)dt \ge \int_{t_0}^{t_1} u_0'(t)u_1(t)dt$$

Lebih jauh jika $W(t_0,t_1)$ non singular maka

$$\int_{t_0}^{t_1} u_0'(t)u_0(t)dt =$$

$$[x_0 - \Phi(t_0,t_1)x_1]'W^{-1}(t_0,t_1)[x_0 - \Phi(t_0,t_1)x_1]$$

Bukti.

Dengan Asumsi $\mathbf{u_1}$ mencapai perpindahan yang diinginkan maka

$$x_1 = \Phi(t_1,t_0)[x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,\sigma)B(\sigma)u_1(\sigma)d\sigma]$$

Jika $\mathbf{u_0}$ seperti ditunjukkan dalam pernyataan Teorema maka $\mathbf{u_0}$ juga mencapai perpindahan yang diinginkan. Jadi

$$x_1 = \Phi(t_1,t_0)[x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,\sigma)B(\sigma)u_0(\sigma)d\sigma]$$

Selisih kedua persamaan diferensial ini untuk x_1 memberikan

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,\sigma)B(\sigma)[u_1(\sigma) - u_0(\sigma)]d\sigma = 0$$

Jika persamaan ini dikalikan dengan ξ' kemudian memanfaatkan definisi dari u_0 memberikan

$$\int_{t_0}^{t_1} u_0'[u_1(\sigma) - u_0(\sigma)]d\sigma = 0$$

Persamaan ini menghasilkan

$$\int_{t_0}^{t_1} u_1'(\sigma)u_1(\sigma) - u_0'(\sigma)u_0(\sigma)d\sigma = \int_{t_0}^{t_1} [u_1(\sigma) - u_0(\sigma)]'[u_1(\sigma) - u_0(\sigma)]d\sigma$$

Karena sisi kanan jelas nonnegatif, ini melengkapi bukti keoptimalan dari $\mathbf{u_0}$.

Amati bahwa dalam kejadian $W(t_0,t_1)$ non singular maka

$$\int_{t_0}^{t_1} u_0'(t)u_0(t)dt = \xi' \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,\sigma)B(\sigma)B'(\sigma)\Phi'(t_0,\sigma)d\sigma\xi = \xi' W(t_0,t_1)\xi$$

$$\int_{t_0}^{t_1} u_0'(t)u_0(t)dt = [x_0 - \Phi(t_0,t_1)x_1]'W^{-1}(t_0,t_1)[x_0 - \Phi(t_0,t_1)x_1]$$

(Terbukti)

Untuk masalah ini matriks A adalah matriks nol maka matriks transisinya $\Phi(t_0,t_1)$ dapat ditentukan melalui Teorema berikut

Teorema 2. (Brockett, 1970)

Jika A suatu matriks bujur sangkar yang elemen-elemennya adalah fungsi dari waktu yang kontinu pada interval $t_0 \le t \le t_1$ dan jika barisan matriks M_k didefinisikan secara rekursif oleh

$$M_0 = I, \quad M_k = I + \int_{t_0}^{t} A(\sigma)M_{k-1}(\sigma)d\sigma$$

Maka Barisan matriks $M_0, M_1, \ldots, M_k$, ...Konvergen Uniform pada interval yang diberikan. Lebih jauh, jika limit fungsi dinotasikan dengan Φ, maka untuk $t_0 \le t \le t_1$,

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,t_0) = A(t)\Phi(t,t_0);$$

$$\Phi(t_0,t_0) = I$$

$$\Phi(0,t) = I$$

Dan Keterkontrolan Gramiannya adalah

$$W(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)B(t)B'(t)\Phi'(t_0,t)dt$$

Jika $t_0 = 0$ maka W

$$(0,t_1) = \int_0^{t_1} \Phi(0,t)B(t)B'(t)\Phi'(0,t)dt =$$

$$= \int_0^{t_1} (1/c).(1/c)dt = \frac{t_1}{c^2}$$

Jadi $W(0,t_1) = \frac{t_1}{c^2}$ sehingga kontrol optimum dapat diperoleh dengan terlebih dahulu mendapatkan ξ yang memenuhi $W(0,t_1)\ \xi = x_0 - \Phi(t_0,t_1)x_1$

diperoleh $\frac{t_1}{c^2}\xi = v_0 - v_1$ sehingga

$\xi = \dfrac{c^2(v_0 - v_1)}{t_1}$ dan dengan menggunakan satu kontrol dalam Teorema 1 yakni

$u_0(t) = -B'(t)\ \Phi'(t_0,t)\xi$ didapatkan kontrol optimumnya adalah

$$i_0(t) = +(c/t_1)(v_1 - v_0)$$

(konstan).

Jika rangkaian listrik diatas dianggap sebagai suatu alat penyimpan energi maka dapat dihitung tingkat efisiensi alat tersebut dengan cara membandingkan (mencari ratio) antara energi yang tersimpan (yang umumnya dimanfaatkan untuk cahaya) dengan energi yang terkirim (penjumlahan energi yang terbuang melalui resistor dengan energi yang tersimpan dalam kapasitor).

Jika v_0 adalah 0 dan arus yang digunakan $i_0(t) = +(c/t_1)(v_1 - v_0)$ maka

i) Energi yang tersimpan dalam kapasitor c (Energy stored) adalah

$$\int_{v_0}^{v_1} q dv = \int_{0}^{v_1} q dv = \int_{0}^{v_1} cv dv = \frac{1}{2} cv_1^2$$

ii) Jika arus listrik yang digunakan $i_0(t) = +(c/t_1)(v_1 - v_0)$ maka Energi yang terbuang melalui resistor r

$$\int_0^{t_1} ri^2(t)dt = ri_0^2 t_1 = \frac{rc^2 v_1^2 t_1}{t_1^2}$$

iii) Energi yang terkirim (Energy delivered) = energy yang terbuang melalui resistor ditambah energi tersimpan dalam kapasitor) =

$$\frac{1}{2} cv_1^2 + \frac{rc^2 v_1^2 t_1}{t_1^2}$$

Jika Tingkat Efisiensi adalah perbandingan antara energi tersimpan dalamKapasitor dengan Energi terkirim maka didapatkan tingkat efisiensinya

$$\frac{1}{1 + \frac{2rc}{t_1}}$$

KESIMPULAN

Persoalan Kontrol Optimal muncul pada masalah peminimuman energi yang terbuang dalam satu komponen resistor r (r = nilai resistansi) rangkaian listrik yang terdiri dari satu komponen r, satu kapasitor c (c = nilai kapasitansi) yang dihubungkan dengan satu sumber arus i(t) dan sumber tegangan v(t) jika $v(0) = v_0$ dan $v(t_1) = v_1$ didapat bahwa model sistem kontrol masalah $\dot{v} = \frac{1}{c} i(t)$, dengan i(t) sebagai kontrol. Fungsional Performansi energi yang terbuang dalam resistor untuk $0 \le t \le t_1$ adalah

$$d = \int_0^{t_1} ri^2(t)dt; \quad \text{r = nilai resistansi.}$$

Pengendali agar energi yang terbuang melalui resistor menjadi minimum adalah i(t) = $i_0(t) = +(c/t_1)(v_1 - v_0)$. Kemudian jika rangkaian tersebut dianggap sebagai suatu alat penyimpan energi dan anggap v(0) = 0 maka dapat ditentukan tingkat efisiensi (perbandingan antara energi yang tersimpan dengan energi yang terkirim) dari rangkaian tersebut adalah $\frac{1}{1 + \frac{2rc}{t_1}}$

DAFTAR PUSTAKA

Brockett, Roger W, *Finite Dimensionality Linear System*, John Wiley and Sons, Inc, New York, 1970

Brogan, William L, *Modern Control Theory*, Third Edition, Prentice Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991

Chukwu, E.N., *Stability and Time-Optimal Control of Hereditary System*, Academic Press, Inc., New York, 1992

Gregory, John and Cantian Lin, *Constrained Optimization in the Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1992

Haberman, Richard, *Mathematical Models in Mechanical Vibrations, Population Dynamics, and Traffic Flow (An Introduction to Applied Mathematics)*, Prentice Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, 1977