GRAM-SCHMIDT DALAM MENGHITUNG NILAI EIGEN SUATU MATRIKS

Ning Eliyati, Yulia Resti

Abstract : *The aim of this research is to using process of Gram-Schmidt in finding Eigenvalue of a matrix by Double QR Algorithm. Usually, QR decomposition is obtained by rotation or reflection. By process of Gram-Schmidt that is orthonormalization process of one bases to another bases, decomposition of orthogonal matrix Q and upper triangle matrix R find an upper Hessenberg matrix.*

Key Word: *Gram-Schmidt process, Double QR Algorithm, Eigenvalue*

Abstrak : *Penelitian ini bertujuan untuk menggunakan proses Gram-Schmidt dalam menghitung nilai Eigen suatu matriks pada algoritma QR Ganda. Lazimnya dekomposisi QR pada suatu algoritma dilakukan dengan rotasi atau refleksi. Dengan menggunakan proses Gram-Schmidt yaitu proses ortonormalisasi dari satu basis ke basis lainnya, dekomposisi matriks orthogonal Q dan matriks segitiga atas R membentuk matriks Hessenberg atas.*

Kata Kunci: *Proses Gram-Schmidt, algoritma QR Ganda, nilai Eigen*

PENDAHULUAN

Saat ini semakin banyak fenomena alam dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan seperti demografi, fisika, teknik mesin dan teknik elektro yang setelah dimodelkan dalam matematika membentuk suatu matriks, seperti matriks Leslie, matriks Putaran Pauli, matriks Ricarti, matriks Skew Hermitian dan sebagainya. Umumnya, dari bentuk matriks tersebut yang diperlukan adalah nilai Eigennya.

Banyak algoritma yang dapat digunakan untuk menghitung nilai Eigen suatu matriks. Algoritma QR merupakan salah satu algoritma yang menghitung nilai Eigen suatu matriks yang berupa barisan iterasi transformasi similaritas. Menurut J.G.F.Francis,1961, (C.G. Cullen, 1994), algoritma QR sangat efektif untuk menghitung semua nilai Eigen dan vektor Eigen dari suatu matriks sebarang, namun menurut D. S Watkins (1991), laju kekonvergenan algoritma QR relatif lambat dan kompleksitas waktunya sangat besar. Fakta ini memotivasi munculnya modifikasi terhadap algoritma QR, salah satu modifikasi tersebut adalah algoritma QR ganda.

Pada prinsipnya, dalam menghitung nilai Eigen suatu matriks algoritma QR Ganda hampir sama dengan algoritma QR. Perbedaannya adalah algoritma QR Ganda

✉ Ning Eliyati, Yulia Resti. adalah Dosen Jur. Matematika. FMIPA UNSRI

memiliki 2 dekomposisi QR sedangkan algoritma QR hanya memiliki 1 dekomposisi QR. Q adalah matriks ortogonal dan R adalah matriks segitiga atas. Dalam bentuk yang paling sederhana algoritma QR (algoritma QR Ganda) menghasilkan barisan matriks yang similar ortogonal terhadap matriks A yang konvergen terhadap matriks segitiga atas R.

Lazimnya dekomposisi QR pada suatu algoritma dilakukan dengan rotasi atau refleksi. Daniel, J.W (1981) menyatakan bahwa jika matriks Q pada dekomposisi QR merupakan matriks ortogonal, maka kolom-kolom pada matriks Q akan merupakan suatu himpunan ortonormal. Menurut D.S.Watkins (1991), proses Gram-Schmidt merupakan suatu proses ortonormalisasi dari satu basis ke basis lainnya. Fakta ini menunjukkan bahwa proses Gram-Schmidt dapat digunakan dalam mendekomposisi suatu matriks yang akan dihitung nilai Eigennya ke bentuk QR. Untuk itu penelitian ini mengkaji algoritma QR Ganda dalam menghitung nilai Eigen suatu matriks dengan menggunakan proses Gram-Schmidt.

TINJAUAN PUSTAKA

Algoritma QR

Setiap iteraksi pada algoritma QR terdiri dari dekomposisi matriks A ke bentuk QR dan transformasi similaritas, dimana A adalah matriks yang akan dihitung nilai Eigennya, Q adalah matriks ortogonal dan R adalah matriks segitiga atas. Algoritma ini dapat dimodifikasi dengan melakukan dua kali dekomposisi QR sehingga disebut algoritma QR Ganda, (Cullen, 1994).

Matriks Ortogonal

Sebuah matriks bujursangkar A, berordo n dikatakan matriks ortogonal jika mempunyai sifat $A^{-1} = A^{t}$, (Shoiciro, 1991).

Matriks Segitiga Atas

Sebuah matriks bujursangkar A, berordo n berbentuk segitiga atas jika setiap elemen yang terletak di bawah diagonal utama adalah nol, (Shoiciro, 1991).

Matriks Hessenberg

Sebuah matriks bujursangkar A, berordo n berbentuk Hessenberg atas jika setiap elemen yang terletak di bawah subdiagonal pertama adalah nol, yaitu $a_{ij} = 0$ untuk $i > j + 1$, (Shoiciro, 1991).

Dekomposisi QR

Komposisi suatu matriks yang berbentuk QR disebut dekomposisi QR apabila Q adalah matriks ortogonal dan R adalah matriks segitiga atas. Dekomposisi QR dapat dilakukan dengan beberapa cara diantaranya dengan rotasi dan refleksi. Menurut Daniel J.W (1981), jika suatu matriks merupakan matriks ortogonal maka kolom-kolom pada matriks-matriks tersebut merupakan suatu himpunan ortonormal. Proses Gram-Schmidt merupakan suatu proses ortonormalisasi (D.S.Watkins,1991). Ini berarti bahwa proses Gram-Schmidt dapat digunakan untuk mendekomposisi matriks.

Proses Gram-Schmidt

Suatu proses yang mengubah sebarang basis ke basis ortonormal disebut *Proses Gram-Schmidt*, (D.S.Watkins,1991)

Basis

Jika V adalah sebarang ruang vektor dan $S = \{v_1, v_2, \ldots v_r\}$ merupakan himpunan berhingga dari vektor-vektor pada V, maka S dinamakan basis untuk V jika S bebas linier dan S merentang V, (D.S.Watkins,1991).

Bebas Linier

Jika $S = \{v_1, v_2, \ldots v_r\}$ adalah himpunan vektor, maka persamaan vektor

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_r v_r = 0$$

memiliki paling sedikit satu pemecahan, yakni $k_1 = 0, k_2 = 0, k_r = 0$ jika ini adalah satu-satunya pemecahan, maka S dinamakan *himpunan bebas linier*, (D.S.Watkins,1991)

Ortonormal

Sebuah himpunan vektor pada ruang hasil kali dalam dinamakan himpunan ortogonal jika semua pasangan vektor-vektor yang berbeda dalam himpunan tersebut ortogonal. Sebuah himpunan ortogonal yang setiap vektornya mempunyai norma 1 dinamakan *ortonormal*, (Shoiciro, 1991).

Teorema 1

Setiap ruang hasil kali dalam berdimensi berhingga taknol mempunyai sebuah basis ortonormal.

Bukti :

Misalkan V adalah sebarang ruang hasil kali dalam berdimensi n taknol, dan misalkan $S = \{u_1, u_2, \ldots u_n\}$, a adalah sebarang basis untuk V. Urutan langkah berikut akan hasilkan basis ortonormal $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ untuk V.

1. Misalkan $v_1 = u_1 / \|u_1\|$. Vektor v_1 mempunyai norma 1.
2. Bangun vektor v_2 yang normanya 1 yang ortogonal terhadap v_1 untuk menghitung komponen u_2 yang ortogonal terhadap ruang W_1 yang direntang oleh v_1.
3. Bangun vektor v_3 dari norma 1 yang ortogonal baik terhadap v_1 maupun v_2 dengan menghitung komponen u_3 yang ortogonal terhadap ruang W_2 yang direntang oleh v_1 dan v_2 dan normalisasi.

Tentukan vektor v_4 dari norma 1 yang ortogonal terhadap v_1, v_2 dan v_3 dengan menghitung komponen u_4 yang ortogonal terhadap ruang w_3 yang direntang oleh v_1, v_2 dan v_3.

Kajian Algoritma QR Ganda yang Menggunakan Proses Gram-Schmidt dalam Menghitung Nilai Eigen Suatu Matriks

Suatu proses yang mengubah sembarang basis ke basis ortonormal disebut proses Gram-Schmidt. Proses Gram-Schmidt digunakan dalam mendekomposisi matriks QR untuk mengortonormalisasi barisan bebas linier. Suatu barisan vektor $q_1, q_2, \ldots, q_k \in R^n$ dikatakan ortonormal jika vektor-vektornya berpasangan ortogonal dan masing-masing vektor mempunyai norm Euclidian 1; yaitu

$$(q_i, q_j) = 0 \text{ jika } i \neq j$$
$$= 1 \text{ jika } i = j$$

Teorema 2

Misalkan $Q \in R^{nxn}$. Maka Q merupakan matriks ortogonal jika dan hanya jika kolom (baris) nya berbentuk himpunan ortonormal.

Bukti :

Misalkan $q_1, q_2, \ldots, q_n$ menunjukkan kolom-kolom Q. Maka

$$Q^T Q = \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{bmatrix} [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n]$$

$$= \begin{bmatrix} q_1^T q_1 & q_1^T q_2 & \cdots & q_1^T q_n \\ q_2^T q_1 & q_2^T q_2 & \cdots & q_2^T q_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_n^T q_1 & q_n^T q_2 & \cdots & q_n^T q_n \end{bmatrix}$$

entri-entri Q merupakan perkalian dalam (q_i, q_j). $Q^T Q = I$ jika dan hanya jika $q_1, q_2, \ldots, q_n$ berbentuk himpunan ortonormal.

Misalkan kita mempunyai vektor ortonormal $q_1, \ldots, q_{k-1}$ sedemikian maka :

$$\langle q_1, \ldots q_i \rangle = \langle v_1, \ldots, v_i \rangle, i = 1, \ldots, k-1$$

$$q_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk} q_j \qquad [2.1]$$

sehingga q_k ortogonal terhadap $q_1, \ldots, q_{k-1}$. Skalar r_{13} dan r_{23} (untuk kasus k=3) harus dipilih sehingga q_3 ortogonal terhadap q_1 dan q_2. Persamaan $(q_k, q_i) = 0$, $i=1, \ldots, k-1$ berarti bahwa

$$(v_k, q_i) - \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk}(q_j, q_i) = 0 \qquad i = 1, \ldots, k-1 \qquad [2.2]$$

Karena $(q_i, q_j) = 0$ jika $i \neq j$ dan $(q_i, q_i) = 1$ persamaan tersebut menjadi

$$r_{ik} = (v_k, q_i) \qquad i = 1, \ldots, k-1$$

Misalkan : $r_{kk} = \|q_k\|_2 \neq 0$ [2.3]

dan $q_k = \dfrac{1}{r_{kk}} q_k$ [2.4]

maka didapat bahwa $\|q_k\|_2 = 1$ dan $(q_i, q_k) = 0 \qquad i = 1, \ldots, k-1$

Hubungan antara proses Gram-Schmidt dengan dekomposisi QR adalah

$$v_k = \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk} q_j + r_{kk} q_k \qquad [2.5]$$

Di sini sebenarnya ada m persamaan seperti itu, masing-masing untuk nilai k.

$$v_1 = q_1 r_{11}$$
$$v_2 = q_1 r_{11} + q_2 r_{22}$$
$$v_3 = q_1 r_{11} + q_2 r_{22} + q_3 r_{33}$$
$$v_m = q_1 r_{1m} + q_2 r_{2m} + \cdots + q_m r_{mm}$$

Dengan mendefinisikan

$$V = [v_1 v_2 \ldots v_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$$
$$Q = [q_1 q_2 \ldots q_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{mm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

V memiliki rank penuh, Q adalah matriks ortogonal dan R merupakan matriks segitiga atas dengan entri positif pada diagonal utama dan V = QR. Ini berarti bahwa proses Gram Schmidt dapat digunakan untuk menghitung dekomposisi QR. Berikut ini merupakan algoritma Gram-Schmidt.

Algoritma Proses Gram-Schmidt

Diketahui $v_1,\ldots,v_m \in R^n$ bebas linier, algoritma berikut menghasilkan suatu himpunan ortonormal $q_1, \ldots, q_m$ sehingga $\langle q_1,\ldots q_i\rangle = \langle v_1,\ldots,v_i\rangle, i = 1,\ldots,m.$

for k=1,...,m

for i=1,...,k-1

$r_{ik}=(v_k,v_i)$

$v_k \leftarrow v_k - r_{ik}\, v_i$

$r_{kk} = \|v_k\|_2$

if (r_{kk} =0) then ($v_1,\ldots,v_k$ tak bebas), exit

$$v_k \leftarrow \frac{1}{r_{kk}} v_k$$

exit

Rancangan Algoritma QR Ganda yang menggunakan Proses Gram-Schmidt

Masukan : Matriks A yang akan dicari nilai Eigennya : A(n,n)

Untuk j = 0, 1, 2, … , n-2

m = n – j

Untuk i = 1, 2, …, Maks

Pilih sebuah shift k_i (= a^i_{mm})

Dekomposisikan : $A_{2i} - k_i I = Q_{2i}R_{2i}$

untuk k=1,...,m

untuk i=1,...,k-1

$r_{ik}=(v_k,v_i)$

$v_k \leftarrow v_k - r_{ik}\, v_i$

$r_{kk} = \|v_k\|_2$

jika (r_{kk} =0) maka ($v_1,\ldots,v_k$ tak bebas) keluar

$$v_k \leftarrow \frac{1}{r_{kk}} v_k$$

keluar

Hitung $A_{2i+1} = k_i I + R_{2i}Q_{2i}$

Dekomposisikan : $A_{2i+1} - k_{i+1}I = Q_{2i+1}R_{2i+1}$

Hitung $A_{2i+2} = k_{i+1}I + R_{2i+1}Q_{2i+1}$

Jika semua entri pada subdiagonal A_{2i+2} = 0

Selesai

Keluaran : sebuah matriks Hessenberg atas yang similar terhadap A

Contoh:

A adalah matriks bujursangkar berordo 4x4:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & -14 & 10 & 5 \end{bmatrix}.$$

Nilai Eigennya diperoleh sebagai berikut:

$$A_1 = Q_1R_1 = Q_1\ A\ Q_1^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & -14 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 8 & 4 \end{bmatrix}.$$

$A_2 = Q_2R_2 = Q_2\ A_1\ Q_2^{-1}$ = H = matriks hessenberg atas

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&2&1\\2&0&2&1\\0&-1&-4&-2\\0&1&8&4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\2&0&1&1\\0&-1&-2&-2\\0&0&2&2\end{bmatrix}.$$

w$_0$ = **e**$_1$ = $[1,0,0,0]^T$, maka vektor-vektor **w**$_1$,**w**$_2$,**w**$_3$, dan **w**$_4$ adalah:

$$w_1 = Hw_0 = \begin{bmatrix}1&1&1&1\\2&0&1&1\\0&-1&-2&-2\\0&0&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix}, w_2$$

$$= Hw_1 = \begin{bmatrix}1&1&1&1\\2&0&1&1\\0&-1&-2&-2\\0&0&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\\-2\\0\end{bmatrix}$$

$$w_3 = Hw_2 = \begin{bmatrix}1&1&1&1\\2&0&1&1\\0&-1&-2&-2\\0&0&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\\-2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\\2\\-4\end{bmatrix}, w_4$$

$$= Hw_3 = \begin{bmatrix}1&1&1&1\\2&0&1&1\\0&-1&-2&-2\\0&0&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\\2\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\4\\0\\-4\end{bmatrix}$$

Dari sistem persamaan linier $a_0 w_0 + a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3 = -w_4$ diperoleh persamaan karakteristik $p(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda$ sehingga nilai Eigen matriks A adalah $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = o$ dan $\lambda_4 = -1$

KESIMPULAN

Proses Gram-Schmidt yang merupakan proses ortonormalisasi dari satu basis ke basis lainnya dapat digunakan pada algoritma QR Ganda untuk menghitung *nilai* Eigen dengan cara mendekomposisi matriks yang akan dihitung nilai Eigennya ke bentuk QR sebanyak dua kali, dimana dekomposisi matriks orthogonal Q dan matriks segitiga atas R membentuk matriks hessenberg atas.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard., 1987. *Elementary Linear Algebra with Application*. Anton and Co

Cullen, Charles G., 1994. ***An Introduction to Numerical Linear Algebra.*** PWS Publishing Company, Boston.

Kreyszig, E., 1988. ***Advanced Enginering Mathematics***, John Wiley and Sons, Inc.

Liu, C.L., 1995. ***Dasar-dasar Matematika Diskret***. Edisi Kedua, P.T. Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.

McCracken, D., 1972. *Numerical Methods with Fortran IV*. John Wiley and Sons.

Nakamura, Shoichiro., 1991. ***Applied Numerical Methods with Software***. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Scarborough, J. B, 1966. ***Numerical Mathematical Analysis***, Baltiore, Johas Hopkins Press.

Watkins, David S., 1991. ***Fundamentals of Matrix Computations.*** John Wiley & Sons..