METODE REED-MERREL DALAM MENYUSUN TABEL KEMATIAN SINGKAT (ABRIDGED LIFE TABLE) DENGAN PENDEKATAN INTEGRAL EULER-MACLAURIN

Yulia Resti

***Abstract** : In this study, the aims are to construct Abridged Life Table in Reed-Merrell's Method by approach of Euler-MacLaurin's integral and to using it on population data of Kecamatan Rambutan Jakarta Selatan, 1990. By this approach we found three main component of Abridged Life Table. The first component is ${}_nm_x$, that is ratio between sum of death in age x until x+n and sum of life years in age x until x+n . The result is ${}_nm_x = \mu_{x+\frac{n}{2}}$,*

the second component is ${}_nq_x = \dfrac{2n.{}_nm_x}{2+n.{}_nm_x+\dfrac{n^2}{2}\left({}_nm_x{}^2-\dfrac{d}{dx}{}_nm_x\right)+....}$, and the last is

${}_nL_x = c.\exp\int_0^n {}_nm_x dx$. By using the data, we found female expected life age is 59.4112 years for female and 53.8197 years for male.

***Keyword:** Life Table, Reed-Merrell Method, Euler-MacLaurin's integral*

***Abstrak :** Penelitian ini bertujuan menyusun Tabel Kematian Singkat (TKS) pada metode Reed-Merrell dengan pendekatan integral Euler-MacLaurin dan menerapkannya pada data penduduk Kecamatan Rambutan Jakarta Selatan tahun 1990. Dengan pendekatan tersebut, diperoleh tiga komponen utama TKS. Komponen pertama adalah*

${}_nm_x = \mu_{x+\frac{n}{2}}$, komponen kedua ${}_nq_x = \dfrac{2n.{}_nm_x}{2+n.{}_nm_x+\dfrac{n^2}{2}\left({}_nm_x{}^2-\dfrac{d}{dx}{}_nm_x\right)+....}$, dan komponen yang

terakhir ${}_nL_x = c.\exp\int_0^n {}_nm_x dx$. Dengan menerapkannya pada data diperoleh usia harapan hiduppenduduk wanita 59,4112 tahun sedangkan penduduk pria 53,8197 tahun.

***Kata Kunci:** Tabel kematian, Metode Reed-Merrell, Integral Euler-MacLaurin*

✉ Yulia Resti . Adalah Dosen Jurusan Matematika FMIPA UNSRI

PENDAHULUAN

Kematian atau panjangnya umur seseorang merupakan suatu rahasia yang tidak dapat diungkapkan oleh manusia di manapun di dunia. Tetapi jika ditinjau secara keseluruhan menurut kelompok umur dan jenis kelamin, dapat dilihat adanya suatu ketentuan yang mengikuti pola-pola tertentu. Jika pada suatu saat di suatu negara telah dilahirkan 1000 bayi laki-laki, maka berdasarkan data tertentu dapat dengan agak cermat ditetapkan berapa banyak dari mereka nanti akan mencapai umur 1 tahun, 2 tahun, 20 tahun, 40 tahun, 50 tahun dan seterusnya. Jika sisa mereka setelah umur sekian meninggal juga, maka dapat dihitung umur rata-rata dari 1000 orang tersebut. Informasi jumlah yang meninggal pada berbagai kelompok umur, yang masih hidup pada berbagai tingkat umur dan umur rata-rata yang dicapai manusia tersusun dalam suatu tabel yang disebut Tabel Kematian. Tabel Kematian merupakan resume berbagai aspek kematian yang diasumsikan mengikuti pola-pola tertentu secara matematis. Dari asumsi tersebut terbentuk bermacam-macam peluang sebagai fungsi umur yang direpresentasikan dalam kolom-kolom tertentu. Fungsi-fungsi umur dalam kolom-kolom tersebut lazim disebut sebagai komponen-komponen penyusun Tabel Kematian.

Pada dasarnya ada dua Tabel Kematian, yaitu Tabel Kematian Singkat (Abridged Life Table) dan Tabel Kematian Lengkap (Complete Life Table). Tabel Kematian Singkat dibuat berdasarkan

pengalaman kematian suatu penduduk dengan periode umur lima tahun atau sepuluh tahun, namun umumnya periode lima tahun. Sedangkan Tabel Kematian Lengkap dibuat dengan periode umur satu tahun.

Penyusunan Tabel Kematian dari data statistik kematian yang telah dikumpulkan dapat dilakukan dengan banyak metode, diantaranya metode Reed-Merrel dan metode Greville. Greville (1943) menunjukkan metode Reed-Merrel dapat didekati dengan aproksimasi integral Euler MacLaurin sedangkan metode Greville dapat didekati dengan ekspansi deret Taylor. Nathanael (1995) menunjukkan metode Reed-Merrel mampu menyusun tabel kematian dengan lebih singkat daripada metode lainnya. Kelebihan metode ini memiliki suatu tabel konversi untuk menyadur nilai ${}_nq_x$ dari ${}_nm_x$ sehingga dapat lebih cepat dalam menyusun tabel kematian. Tetapi metode ini terbatas sebab konstanta yang digunakan pada ${}_nq_x$ dan ${}_nL_x$ tidak berlaku umum. Salah satu kemungkinan yang dapat dilakukan adalah dengan mengekspansi rumus komponen penyusun tabel kematian pada Metode Reed-Merrel dengan pendekatan Integral Euler-Maclaurin.

Metode Reed-Merrel dalam Menyusun Tabel Kematian Singkat dengan Pendekatan Integral Euler-Maclaurin

Komponen penyusun Tabel Kematian pada Metode Reed-Merrel dibangun dengan menggunakan asumsi bahwa l_x merupakan fungsi kuadrat. Sementara komponen penyusun Tabel Kematian pada Metode Greville dibangun dengan asumsi bahwa l_x merupakan fungsi kubik dan dapat didekati dengan menggunakan pendekatan Integral Euler-Maclaurin. Menurut Ramakumar (1986) jika nilai ${}_nm_x$ pada metode Greville mengikuti asumsi Gompertz, maka nilai ${}_nq_x$ pada metode Greville, identik dengan nilai ${}_nq_x$ pada metode Reed-Merrel. Karena itu penelitian ini akan mengekspansi rumus baku komponen penyusun Tabel Kematian untuk Metode Reed-Merrel dengan asumsi l_x merupakan fungsi pangkat tiga dan menggunakan pendekatan pendekatan Integral Euler-Maclaurin agar dapat digunakan untuk data dengan tingkat ke-matian yang tinggi.

Menurut Nathnael (1995), Tabel Kematian merupakan resume berbagai aspek kematian yang diasumsikan mengikuti pola-pola tertentu secara matematis. Dari asumsi tersebut terbentuk bermacam-macam peluang sebagai fungsi umur yang direpresentasikan

dalam kolom-kolom tertentu. Fungsi-fungsi umur dalam kolom-kolom tersebut lazim disebut sebagai komponen-komponen penyusun Tabel Kematian. Antara satu komponen tertentu dengan komponen lainnya memiliki hubungan. Dari hubungan itu, jika komponen tertentu tersebut sudah diketahui datanya maka komponen lain dapat ditentukan. Adapun komponen-komponen Tabel Kematian dan hubungan antar komponen tersebut ditunjukkan sebagai berikut :

1. Komponen x, menyatakan umur.
2. Komponen ${}_nq_x$, adalah probabilitas seseorang akan mati antara umur x sampai x+n. Didefinisikan :

   $${}_np_x = 1 - {}_nq_x \text{ ....[.1]}$$

   dimana ${}_np_x$ merupakan probabilitas seseorang untuk bertahan hidup antara umur x sampai x+n.
3. Komponen l_x, menyatakan jumlah orang yang masih hidup hingga berumur tepat x. Didefinisikan :

   $$l_{x+n} = l_x \cdot p_x \text{ ....[2]}$$

   Umumnya diawali dengan l_0 = 100.000
4. Komponen ${}_nd_x$, menyatakan jumlah orang yang mati antara umur x sampai x+n. Didefinisikan :

   $${}_nd_x = l_x \cdot {}_nq_x \text{ ....[3]}$$

   Jika persamaan [E.1.1] disubstitusikan ke persamaan [E.1.2] diperoleh :

   $$l_{x+n} = l_x\ (1 - {}_nq_x)$$

   $$= l_x - l_x \cdot {}_nq_x \text{ ....[4.a]}$$

   $$l_{x+n} = l_x - {}_nd_x \text{ ....[4.b]}$$

5. Komponen $_nL_x$, yaitu jumlah tahun hidup orang antara umur x sampai x+n. Didefinisikan :

$$_nL_x = \int_x^{x+n} l_t\,dt = \int_0^n l_{x+t}\,dt \quad ....[5]$$

6. Komponen T_x , yaitu jumlah kumulatif tahun hidup orang sesudah berumur x. Didefinisikan sebagai :

$$T_x = \sum_x^{x+n} L_t = \int_x^{x+n} l_t\,dt \quad ....[6]$$

atau dapat ditulis :

$T_x = L_x + T_{x+1}$ ....[.7]

jika komponen ini dihitung dari umur x tertinggi.

7. Komponen e^o_x , yaitu jumlah rata-rata tahun harapan hidup orang sesudah berumur x. Didefinisikan :

$$e^o_x = \frac{T_x}{l_x} \quad ....[.8]$$

Selain itu fungsi umur lain yang penting dalam menyusun tabel kematian namun tidak dicantumkan dalam susunan tabel kematian adalah angka kematian pada umur x sampai x+n yang didefinisikan,

$$_nm_x = \frac{_nd_x}{_nL_x} \quad ....[.9]$$

Metode Reed-Merrel dan Metode Greville

Reed-Merrel (1939) menunjukkan bahwa jika l_x diasumsikan linier maka q_x bukan merupakan peluang dan jika l_x diasumsikan eksponensial maka komponen $l_x = c \exp(-x.\,_nm_x)$ tidak memberikan hasil yang akurat.

Dalam menyusun tabel kematian Reed-Merrel memberikan :

$$_nq_x = 1 - \exp\left(-n._nm_x - an^3\,_nm^2_x\right) \quad ......[10]$$

dengan a = 0.008 . Dengan adanya konstanta a ini nilai $_nq_x$ dapat lebih cepat diperoleh. Susunan nilai-nilai tersebut dalam suatu tabel disebut Nathanael sebagai tabel konversi yang menyadur nilai $_nq_x$ dari $_nm_x$.

Pada umur di bawah 10 tahun komponen $_nL_x$ didefinisikan :

untuk kelompok umur 0-1 tahun, $L_0 = 0.276l_0 + 0.724l_1$ ....[11]

untuk kelompok umur 1-4 tahun, $_4L_1 = 0.034l_0 + 1.184l_1 + 2.782l_5$ ....[12]

untuk kelompok umur 5-10 tahun, $_5L_5 = -0.003l_0 + 2.242l_5 + 2.761l_{10}$ ....[13]

Sedangkan pada umur di atas 10 tahun komponen $_nL_x$ didefinisikan :

$$_nL_x = T_x - T_{x+n} \quad ....[14]$$

Komponen T_x untuk umur di atas 5 tahun didefinisikan :

$$T_x = -0.20833l_{x-5} + 2.5l_x + 0.20833l_{x+5} + 5\sum_{i=1}^{\infty} l_{x+5i} \quad ....[15]$$

Dari rumus ini kita dapati asumsi bahwa l_x adalah parabola (fungsi kuadrat). Sedangkan untuk komponen T_0 dan T_1 dihitung menurut rumus komponen tabel kematian yang telah didefinisikan dalam [7], yakni :

$T_0 = T_1 + L_0$ $\quad$ $T_1 = T_5 + {}_4L_1$

Dengan metode Reed-Merrel ini diperoleh tabel kematian dengan hasil yang akurat dan tepat. Tetapi metode ini terbatas sebab konstanta yang digunakan pada ${}_nq_x$ dan ${}_nL_x$ tidak berlaku umum khususnya bila tingkat kematiannya tinggi.

Greville (1943) mengemukakan metodenya sebagai berikut :

$$ {}_nq_x = \frac{2n_n m_x}{2 + n_n m_x + \frac{n^2}{6}\left({}_n m_x^2 - \frac{d}{dx}{}_n m_x\right) + \ldots} \quad \ldots\ldots[16] $$

Untuk komponen ${}_nL_x$ dihitung sebagai berikut :

$$ {}_nL_x = \frac{n}{2}(l_x + l_{x+n}) + \frac{n}{24}({}_nd_{x+n} - {}_nd_{x-n}) \quad \ldots\ldots.[17] $$

[17] menunjukkan bahwa Greville menggunakan asumsi bahwa l_x adalah fungsi kubik. Sedangkan komponen T_x dihitung menurut rumus komponen tabel kematian yang telah didefinisikan dalam [7].

Menurut editor Journal of Institute of Actuaries of USA (Jaffe,1960) komponen ${}_nq_x$ pada metode Greville dapat didekati dengan integral Euler-Maclaurin yang didefinisikan

$$ \frac{1}{n}\int_a^{a+bn} f(x)dx = \frac{1}{2}[f(a) + f(a+bn)] $$

$$ - \frac{n}{12}\left[\frac{d}{dx}f(a+bn) - \frac{d}{dx}f(a)\right] $$

$$ + \frac{n^3}{720}\left[\frac{d^3}{dx^3}f(a+bn) - \frac{d^3}{dx^3}f(a)\right] \quad \ldots\ldots[18] $$

Dengan menggunakan pendekatan [18] ke [5] diperoleh :

$$ T_x = \sum_{h=0}^{\infty} {}_nL_{x+nh} = c\left\{\frac{1}{n}\int_x^{\infty}\exp\left(-\int {}_n m_x dx\right)dt + \tfrac{1}{2}\exp\left(-\int {}_n m_x dx\right)\right. $$

$$ \left. + \frac{n}{12}{}_n m_x \exp\left(-\int {}_n m_x dx\right)dx + \ldots\right\} \quad \ldots..[19] $$

Dengan menurunkan kedua sisi [19] diperoleh komponen l_x yang bila disubstitusikan ke [4.a] diperoleh [16]. Jika [16] dilogaritmakan kedua sisinya diperoleh

$$ {}_nq_x = 1 - \exp\left\{-n_n m_x - \frac{n^3}{12}{}_n m_x^2 \frac{d}{dx}\log_n m_x\right\} \quad \ldots[20] $$

Komponen ${}_nq_x$ pada metode Greville sering juga didefinisikan sebagai [20].

Ramakumar (1986) menunjukkan bahwa jika nilai ${}_n m_x = \mu_{x+(n/2)}$ mengikuti asumsi Gompertz $\mu_x = Bc^x$, maka

$$ {}_n m_x = \mu_{x+(n/2)} = Bc^{x+(n/2)} $$

$$ \text{dan } \frac{d}{dx}\log_n m_x = \log c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..[21] $$

disubstitusi ke [E.2.13]maka diperoleh

$$ {}_nq_x = 1 - \exp\left\{-n_n m_x - n^3 \frac{\log c}{12}({}_n m_x)\right\} $$

$$ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..[22] $$

yang identik dengan nilai ${}_nq_x$ pada [1] yakni

$$ {}_nq_x = 1 - \exp\left(-n_n m_x - an^3{}_n m^2{}_x\right) $$

dengan :

$$ \frac{d}{dx}\log_n m_x = \log c, \quad \frac{\log c}{12} = a $$

dan $\log c = 0.096$

Jika l_x adalah suatu fungsi kontinu, maka kematian dapat terjadi saat itu juga dan kematian seperti ini didefinisikan sebagai:

$$\mu_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{l}{l_x}\left[\frac{l_x - l_{x+\Delta x}}{\Delta x}\right] = \frac{-d \log l_x}{dx} \quad \text{.........[23]}$$

Dari [23]

$$\frac{dl_x}{dx} = -\mu_x l_x \quad \text{..................[24]}$$

dimana $\mu_x l_x$ disebut kurva kematian atau:

$$\frac{dl_x}{l_x} = -\mu_x d_x \quad \text{dan}$$

$$\log l_x = -\int \mu_x d_x + c$$

$$l_x = c.\exp\left(\int \mu_x d_x\right) \quad \text{............[25]}$$

$$\int_0^1 \mu_{x+t} l_{x+t}\, dt = dx \quad \text{.......[26]}$$

Dengan [3] diperoleh:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{1}{l_x}\int_0^1 \mu_{x+t} l_{x+t}\, dt = \int_0^1 {}_t p_x \mu_{x+t}\, dt \quad \text{......[27]}$$

$$q_x = -\frac{1}{l_x}\int_0^1 \left(\frac{dl_{x+t}}{dx}\right) dt \quad \text{......................[28]}$$

Misalkan l_x adalah fungsi kuadrat l_x = a+bx+cx^2 , maka $\frac{dl_x}{dx} = b + 2cx$

dengan mengambil x=-1,0,1 untuk l_x dan x=0 untuk turunannya diperoleh: l_{x-1}=a-b+c, l_{x+1}=a+b+c dan

$$\mu_x = \frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2 l_x} \quad \text{.................[29]}$$

Dengan menggunakan pendekatan integral Euler-MacLaurin

$${}_n L_x = \int_0^n l_{x+t}\, dt = c.\exp\left[\int_x^{x+n} {}_n m_t\right] = c.\exp \int_0^n {}_n m_x$$

....[30]

Dengan menurunkan [19] diperoleh:

$$l_x = {}_n L_x \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\,{}_n m_x + \frac{n}{12}\left({}_n m_x^{\,2} - \frac{d}{dx}\,{}_n m_x\right) + \ldots\right\} \ldots$$

....[31]

dan

$${}_n q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{{}_n m_x \cdot {}_n L_x}{l_x}.$$

$${}_n q_x = \frac{2n.\,{}_n m_x}{2 + n.\,{}_n m_x + \frac{n^2}{2}\left({}_n m_x^{\,2} - \frac{d}{dx}\,{}_n m_x\right) + \ldots}$$

....[32]

sedangkan

$${}_n p_x = \frac{2 - n.\,{}_n m_x + \frac{n^2}{2}\left({}_n m_x^{\,2} - \frac{d}{dx}\,{}_n m_x\right) + \ldots}{2 + n.\,{}_n m_x + \frac{n^2}{2}\left({}_n m_x^{\,2} - \frac{d}{dx}\,{}_n m_x\right) + \ldots}$$

....[33]

Dengan menerapkannya pada data diperoleh:

Tabel 1. Kematian Singkat Penduduk Pria Kecamatan Rambutan Jakarta Selatan tahun 1990

Umur	n	${}_nm_x$	${}_nq_x$	${}_np_x$	l_x	${}_nd_x$	${}_nL_x$	T_x	e_x
0 – 1	1	0.08910	0.085304	0.914695	100000	8530.40	93824.00	5016604.7	50.1660
1 – 5	4	0.01650	0.064000	0.936000	91469.5	5854.02	349882.60	4922780.7	53.8197
5 – 10	5	0.00320	0.015883	0.984117	85615.5	1359.81	424280.30	4572898.2	53.4119
10 – 15	5	0.00240	0.011934	0.988066	84255.7	1005.51	418851.01	4149229.9	49.2456
15 – 20	5	0.00430	0.021289	0.978711	83250.2	1772.28	411922.49	3730378.9	44.8092
20 – 25	5	0.00370	0.018343	0.981656	81477.9	1494.58	403736.70	3318456.4	40.7282
25 – 30	5	0.00550	0.027155	0.972845	79983.3	2171.93	394592.27	2914719.7	36.4415
30 – 35	5	0.00520	0.025691	0.974308	77811.4	1999.07	383858.04	2520127.4	32.3876
35 – 40	5	0.00520	0.015883	0.984117	75842.3	1204.11	376409.60	2136269.4	28.1783
40 – 45	5	0.01020	0.049820	0.950197	74608.2	3717.00	364609.58	1759859.8	23.5879
45 – 50	5	0.01560	0.075261	0.924739	70891.2	5335.32	341082.68	1395250.2	19.6815
50 – 55	5	0.01110	0.054105	0.945895	65555.9	3546.87	320586.09	1054167.5	16.0804
55 – 60	5	0.04810	0.215582	0.784417	62009.0	13368.06	277993.63	733581.4	11.8302
60 – 65	5	0.04620	0.207953	0.792047	48641.0	10115.04	217065.12	455587.8	9.36632
65 – 70	5	0.05450	0.240785	0.759215	38525.9	9276.48	173425.00	238522.7	6.19121
70+	5	0.08920	1.000000	0.000000	29249.5	29249.51	327909.25	327909.3	11.2107

Tabel 2. Kematian Singkat Penduduk Wanita Kecamatan Rambutan Jakarta Selatan tahun 1990

Umur	n	${}_nm_x$	${}_nq_x$	${}_np_x$	l_x	${}_nd_x$	${}_nL_x$	T_x	e_x
0 – 1	1	0.0647	0.062683	0.937317	100000	6268.28	95461.80	5664178.5	56.6417
1 – 5	4	0.0106	0.041569	0.958431	93731.7	3896.32	364300.50	5568716.7	59.4112
5 – 10	5	0.0017	0.008467	0.991533	89835.4	760.62	447046.50	5204416.3	57.9327
10 – 15	5	0.0004	0.001998	0.998001	89074.7	177.99	444872.09	4757915.5	53.4148
15 – 20	5	0.0011	0.005586	0.994513	88896.7	487.70	443583.61	4313043.4	48.5174
20 – 25	5	0.0039	0.019326	0.980673	88409.1	1708.60	438039.21	3869459.8	43.7676
25 – 30	5	0.0041	0.020308	0.979602	86700.5	1760.69	428990.98	3431420.6	39.5778
30 – 35	5	0.0028	0.013910	0.986089	84939.8	1181.53	421724.21	3002429.6	35.3477
35 – 40	5	0.0040	0.019817	0.980182	83758.2	1659.84	414692.57	2580705.4	30.8113
40 – 45	5	0.0035	0.017360	0.982640	82098.4	1425.21	407396.63	2166012.8	26.3831
45 – 50	5	0.0099	0.048388	0.951611	80673.2	3903.63	394273.96	1758616.2	21.7992
50 – 55	5	0.0124	0.060262	0.939738	76769.6	4626.26	372774.04	1364342.2	17.7719
55 – 60	5	0.0181	0.086825	0.913175	72143.3	6263.84	364322.50	991568.1	13.7444
60 – 65	5	0.0352	0.162420	0.837579	65879.5	10700.18	304164.44	645245.6	9.79432
65 – 70	5	0.0557	0.245426	0.754573	55179.3	13542.46	248485.51	341082.2	6.18133
70 +	5	0.0894	1.000000	0.000000	41636.8	41636.86	465736.71	465736.7	11.1856

Dengan menerapkannya pada data diperoleh usia harapan hidup penduduk wanita lebih tinggi daripada usia harapan hidup penduduk pria, yaitu penduduk wanita mempunyai usia harapan hidup 59,4112 tahun sedangkan penduduk pria 53,8197 tahun.

DAFTAR PUSTAKA

Barclay, G.W. , 1958. ***Techniques of Population Analysis*** , John Wiley and Sons, Inc., New York.

Department of International Economic in Social Affairs United Nations, 1983. ***Manual X Indirect Techniques for Demographic Estimation***, Academic Press, Orlando.

N. A. Yunus, 1981. ***Sumber-sumber dan Evaluasi Data Kependudukan.*** Lembaga Demografi Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia, Jakarta.

N. Hanim, 1989. ***A Comparison of Several Indirect Tecniques of Estimating Infant Mortality in South Sumatera,Indonesia.*** The Australian National University, National Centre for Development Study, Graduate in Demography, Canberra.

N. Iskandar, 1977. ***Demografi Teknik,*** Lembaga Demografi FE UI, Jakarta.

Pathak,K.B. dan F.Ram,1992. ***Techniques of Demographic Analysis***, Himalaya Publishing House, Bombay.

Ramakumar, R., 1986. ***Technical Demography***, Wiley Eastern Limited, New Delhi.

Shryock, H.S., 1976. ***The Methods and Materials of Demography***, Academic Press, New York

Spiegelman,M., 1980. ***Introduction to Demograph,*** (Revised Edition), Harvard University Press,