Jurnal Penelitian Sains ; hal 79 - 86
No. 19 April 2006 ISSN: 1410-7058

ESTIMASI *RISK PREMIUM* UNTUK ASURANSI KUMPULAN DENGAN MODEL COMPOUND POISSON-EKSPONENSIAL

Yulia Resti
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya

ABSTRACT

The aim of this research is estimate risk premium of group insurance that using Compound Poisson-Eksponensial model by Credibility Theory. Assuming every group has mutually independent aggregate claim and compound Poisson distributed, and amount of claim is exponential distributed, we have found that estimated risk premium of every group is dominant influenced by theirselves.

Key Words: risk premium, group insurance, compound Poisson-Eksponensial model

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan mengestimasi *risk premium* asuransi kumpulan menggunakan model Compound Poisson-Eksponensial dengan teori Credibility. Dengan mengasumsikan klaim aggregate masing-masing kelompok saling bebas dan berdistribusi compound Poisson, dan besarnya klaim berdistribusi eksponensial diperoleh bahwa estimasi risk premium masing-masing kelompok asuransi kumpulan dominan dipengaruhi oleh kelompoknya sendiri.

Kata Kunci: *risk premium*, asuransi kumpulan, model compound Poisson-Eksponensial

I. PENDAHULUAN

Tarif premi asuransi adalah harga per unit produk asuransi. Menurut Kaas (2001), ada beberapa prinsip yang digunakan untuk menghitung tarif premi, salah satunya adalah prinsip ekivalen, yaitu jika distribusi *loss* sebenarnya dari suatu portfolio diketahui maka tarif premi adalah ekspektasi dari distribusi *loss*. Jika yang dipertimbangkan hanya loss atau resiko maka tarif premi ini disebut *risk premium*.

Pada industri asuransi, selain ada produk asuransi untuk individu, ada juga produk asuransi untuk kelompok yang disebut asuransi kumpulan. Dalam mengestimasi premi suatu produk asuransi kumpulan, selain resiko suatu objek dengan kelompoknya, juga dipertimbangkan resiko kolektif, yaitu resiko antar kelompok objek, karena resiko pada suatu kelompok tertentu selain memiliki karakteristik khusus juga memiliki karakteristik umum yang dimiliki resiko kelompok lainnya.

Menurut Bowers (1997), distribusi compound Poisson fleksibel digunakan untuk mengaproksimasi klaim pada asuransi kumpulan yang disebut klaim *aggregate* yaitu jumlah klaim objek-objek yang membentuknya., karena jumlah variabel acak yang saling bebas yang masing-masing berdistribusi compound Poisson juga berdistribusi compound Poisson. Karena besarnya klaim di sini diasumsikan berdistribusi eksponensial, maka klaim aggregate itu dikatakan berdistribusi Compound Poisson-Eksponensial.

Berdasarkan fakta di atas, akan dilakukan penelitian mengenai estimasi risk premium untuk asuransi kumpulan dengan model Compound Poisson-Eksponensial.

II. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

1) Mengumpulkan data sekunder individu (setiap mobil) tentang berat (kg) dan mesin mobil (hp), banyaknya klaim, dan total besarnya klaim pada masing-masing tahun sebanyak 3 tahun kalender.
2) Meng-*cluster* data individu untuk mengidentifikasi data kelompok mobil.
3) Mengaproksimasi klaim aggregate menggunakan distribusi compound Poisson-Eksponensial.
4) Aplikasi data.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada penelitian ini data observasi berupa data 100 jenis mobil yang mencakup data berat (kg) dan mesin mobil (hp), data banyaknya klaim, dan data total besarnya klaim pada masing-masing tahun sebanyak 3 tahun kalender (Resti, 2003). Karena variansi data berat (kg) dan mesin (hp) 100 jenis mobil pada data terlalu lebar, yaitu:

	Mesin (HP)	Berat (kg)
Ukuran	4-445	732-5140
Rata-rata	247	3268
Variansi	15586	964379

Tabel 1. Ukuran, Rata-rata dan Variansi Mesin dan Berat dari100 jenis Mobil

maka data 100 jenis mobil tersebut d-*cluster*, untuk memperkecil variansinya. Dalam penelitian ini peng-*cluster*-an dilakukan dengan menggunakan *software* SPSS, di mana pembeda dihitung dengan jumlah kuadrat deviasi dan pembentukan cluster dilakukan dengan metode ward.

Klasifikasi Kelompok Asuransi Tipe Mobil

Analisis *cluster* memberikan suatu cara pembentukan kelompok tipe mobil dimana tipe mobil dalam kelompok yang sama adalah mobil yang berat dan mesinnya sama.

Pembeda antar mobil yang dihitung dengan menghitung jumlah kuadrat deviasi adalah:

$$d_{1,1} = b_1(a_{1,1} - a_{1,1})^2 + b_2(a_{1,2} - a_{1,2})^2 = 0$$

$$d_{1,2} = b_1(a_{1,1} - a_{2,1})^2 + b_2(a_{1,2} - a_{2,2})^2 = 0.156$$

$$\vdots$$

$$d_{99,100} = b_1(a_{99,1} - a_{100,1})^2 + b_2(a_{99,2} - a_{100,2})^2 = 0.165$$

dimana:

$$b_1 = \frac{1}{\frac{1}{99}\left[(a_{1,1} - \bar{a}_{.1})^2 + \cdots + (a_{100,1} - \bar{a}_{.1})^2\right]} = 6.4\text{x } 10^{-5}$$

$$b_2 = \frac{1}{\frac{1}{99}\left[(a_{1,2} - \bar{a}_{.2})^2 + \cdots + (a_{100,2} - \bar{a}_{.2})^2\right]} = 10^{-6}$$

rata-rata masing-masing ukuran mesin (PH) dan berat (kg) adalah:

$$\bar{a}_{.1} = \frac{1}{100}(a_{1,1} + \ldots + a_{100,1}) = 246.48 \text{ PH}$$

$$\bar{a}_{.2} = \frac{1}{100}(a_{1,2} + \ldots + a_{100,2}) = 3267.99 \text{ kg}$$

Matriks dissimilarity antara tipe mobil :

$$= \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & \cdots & d_{1,100} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & \cdots & d_{2,100} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{100,1} & d_{100,2} & \cdots & d_{100,100} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0.155671 & \cdots & 0.889349 \\ 0.155671 & 0 & \cdots & 0.465545 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0.889349 & 0.465545 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

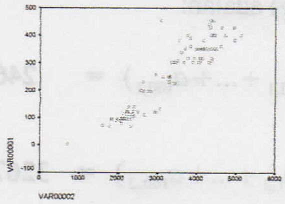
dan seterusnya.

Dari software SPSS diperoleh cluster tipe mobil secara lengkap berikut ini:

Cluster	No. Observasi	Jumlah	Tipe mobil Mesin (hp) Rata2	Var	Berat (kg) Rata2	Variansi
I	21,24,25,26,27,28,29,30,31,35, 36,37,38,39,40,41,54,57,58,59, 60,61,62,63,64,65,66,67,68,69, 79,85,87,88,89,90,91,92	38	110.9	1475	2188	118204
II	1,2,3,4,5,10,11,15,16,17,18,19, 20,22,23,42,43,44,45,53,55,56, 74,80,84,86,94,97	28	271.8	6831	3409	115935
III	6,7,8,9,12,13,14,32,33,34,46,47 ,4849,50,51,52,70,71,72,73,75, 76,77,78,81,82,83,93,95,96,98, 99,100	34	367.8	2047	4360	77653

Tabel 2. Cluster Tipe Mobil

Jika digambarkan dengan scatter plot:



Grafik 1. Scatter Plot Mesin (PH) dan Berat Mobil (kg)

Setelah memperoleh *cluster* tipe mobil yang dialokasikan sebagai kelompok asuransi kumpulan, selanjutnya data klaim dikelompokkan menurut kelompok asuransi tersebut yang diringkaskan dalam tabel berikut:

Kelompok Asuransi Kumpulan	Klaim 2000 Total Besarnya Klaim	2000 Banyaknya Klaim	2001 Total Besarnya Klaim	2001 Banyaknya Klaim	2002 Total Besarnya Klaim	2002 Banyaknya Klaim
1	12929	43	14461	45	15959	49
2	31146	78	33449	83	35878	90
3	16484	67	17048	63	19178	69

Tabel 3. Data Klaim Kelompok

Model Compound Poisson Eksponensial

Model Resiko Individu

Misalkan untuk suatu portfolio dalam 1 kelompok pada 1 periode: N menunjukkan banyaknya klaim, X_1 menunjukkan besarnya klaim pertama, X_2 menunjukkan besarnya klaim kedua, dan seterusnya, maka

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N \qquad [1]$$

merupakan klaim aggregate dari portfolio itu.

	Kelompok Asuransi I
	Periode 1
1	$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$
2	
:	
Jumlah	

Model Resiko Kolektif

Pada model resiko kolektif kita mengasumsikan suatu proses acak yang mengenerate klaim untuk suatu portfolio polis. Proses ini dikarakterisasi dalam term portfolio sebagai keseluruhan, bukan dalam term polis individu.

Dengan memandang fenomena pada polis individu [1] dalam term portfolio sebagai keseluruhan, yaitu

	Kelompok Asuransi I
	Periode 1
1	
2	
:	
N	
Jumlah	$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$

N menunjukkan banyaknya klaim pada kelompok, X_1 menunjukkan besarnya klaim pertama, X_2 menunjukkan besarnya klaim kedua, dan seterusnya, maka [1] merupakan klaim aggregate kelompok itu.

Distribusi klaim aggregate dalam suatu periode yang fix, dapat diperoleh dari distribusi banyaknya klaim dan distribusi besarnya klaim individu. Misalkan pada model resiko kolektif klaim aggregate [1] diasumsikan: variabel acak $N, X_1, X_2, \cdots$ saling bebas, N berdistribusi Poisson dengan parameter λ, dan $X_1, X_2, \cdots, X_N$ berdistribusi identik.

Kasus khusus:

$X_1, X_2, \cdots, X_N$ identik berdistribusi eksponensial dengan parameter β.

Maka:

$$E[S]=E\left[\sum_{k=1}^{N}X_k\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P[N=n]\,E\left[\sum_{k=1}^{N}X_k\,|N=n\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P[N=n]\,E\left[\sum_{k=1}^{n}X_k\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P[N=n]\,.n.E[X]$$

$$=E[N].E[X]$$

$$E[S]=\lambda\beta \qquad [2]$$

dan variansinya:

$$Var(S)=E_N\left[Var_S(S|N)\right]+Var_N\left(E_S\left[S|N\right]\right)$$

$$=E_N\left[Var_S\left(\sum_{k=1}^{N}X_k|N\right)\right]+Var_N\left(E_S\left[\sum_{k=1}^{N}X_k|N\right]\right)$$

$$=E_N[N].Var[X]+Var_N(N).\left(Var(X)+\{E[X]\}^2\right)$$

$$=\lambda\beta^2+\lambda\beta^2+\lambda\beta^2$$

$$Var(S)=3\lambda\beta^2 \qquad [3]$$

Jika dalam suatu periode terdapat m kelompok klaim aggregate,

$S_1=X_{11}+X_{12}+\cdots+X_{1N_1}=\sum_{k=1}^{N_1}X_{1k}$ menyatakan besarnya klaim aggregate pada kelompok 1,

$S_2=X_{21}+X_{22}+\cdots+X_{2N_2}=\sum_{k=1}^{N_2}X_{2k}$ menyatakan besarnya klaim aggregate pada kelompok 2,

:

$S_m=X_{m1}+X_{m2}+\cdots+X_{m,N_m}=\sum_{k=1}^{N_m}X_{mk}$ menyatakan besarnya klaim aggregate pada kelompok m,

maka $S=S_1+S_2+\cdots+S_m=\sum_{j=1}^{m}S_j$ juga merupakan klaim aggregate.

		Kelompok Asuransi				
1		2		...	m	
1		1			1	
2		2			2	
:		:			:	
N_1		:			:	
		N_2			:	
					N_3	
S_1		S_2		...	S_m	
		S				

Dengan mengasumsikan:

1. $S_1,S_2,\cdots,S_m$ merupakan variabel acak yang saling bebas.
2. Masing-masing variabel acak N_j dan $X_{j1},X_{j2},\cdots,X_{j,N_j}$ saling bebas.
3. Untuk masing-masing S_j, N_j berdistribusi Poisson dengan parameter λ_j dan $X_{j1},X_{j2},\cdots,X_{j,N_j}$ berdistribusi identik

Kasus khusus:

$X_{j1}, X_{j2}, \cdots, X_{j,N_j}$ berdistribusi eksponensial dengan parameter β_j.

Maka ekspektasi dan variansi S adalah:

$$E[S] = E\left[\sum_{j=1}^{m} S_j\right] = \sum_{j=1}^{m} E\left[S_j\right] = \sum_{j=1}^{m} E\left[\sum_{k=1}^{N_j} X_{jk}\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{n_j=0}^{\infty} P\left[N_j = n_j\right] E\left[\sum_{k=1}^{N_j} X_{jk} \middle| N_j = n_j\right]\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{n_j=0}^{\infty} P\left[N_j = n_j\right] . n_j . E\left[X_j\right]\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} E\left[N_j\right] . E\left[X_j\right]$$

$$E[S] = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \beta_j \qquad [5]$$

dan variansinya:

$$Var[S] = \sum_{i=1}^{m} Var\left[S_j\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{m} E_{N_j}\left[Var_{S_j}\left(\sum_{k=1}^{N_j} X_{jk} \middle| N_j\right)\right] + Var_{N_j}\left(E_{S_j}\left[\sum_{k=1}^{N_j} X_{jk} \middle| N_j\right]\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} E_{N_j}\left[N_j\right] . Var\left[X_j\right] + Var_{N_j}\left(N_j\right) . \left(Var\left(X_j\right) + \left\{E\left[X_j\right]\right\}^2\right)$$

$$Var[S] = 3\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \beta_j^{\,2} \qquad [6]$$

Jika pada masing-masing kelompok klaim aggregate diamati selama 1 tahun

Kelompok Asuransi									
1			2			...	m		
Tahun			Tahun				Tahun		
1	2	3	1	2	3		1	2	3
						.			
S_1									
			S_2						
						...			
							S_m		

maka klaim aggregate kelompok itu dipandang sebagai klaim aggregate dalam suatu periode, dengan mengasumsikan bahwa klaim aggregate masing-masing tahun identik dan saling bebas.

Dengan mengaplikasikan data pada tabel 3 ke teori credibility yaitu

$$\hat{\hat{X}}_j = z_j \bar{X}_j + (1 - z_j)\hat{\bar{X}}$$

di mana: faktor credibility pada masing-masing kelompok j: $\hat{z}_j = \dfrac{N_j}{N_j + \hat{k}}$ dan estimator k:

$$\hat{k} = \frac{\text{Ekspektasi dari variansi proses}}{\text{Variansi dari rata-rata bersyarat}}$$

diperoleh faktor credibility dan risk premium berikut :

Klas Asuransi	Faktor Credibility $\hat{z}_j$	Risk Premium $\hat{\hat{X}}_j$ (Rp)	$\overline{X}_j$ (Rp)
I	0.997	264.265	264.774
II	0.996	315.516	316.416
III	0.998	399.586	400.291

Tabel 4. Faktor Credibility dan Risk Premium CPE

di mana:

$$\hat{\hat{X}} = \frac{E[S]}{E[N]} = \frac{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \beta_j}{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j} = 336.764$$

variansi dalam kelompok: $\hat{v} = 3486$, dan variansi antar kelompok: $\hat{w} = 6973$

Tabel.4 mengindikasikan bahwa risk premium masing-masing kelompok dominan dipengaruhi oleh kelompoknya sendiri. Tetapi jika faktor credibilitynya mendekati nol, maka risk premium masing-masing kelompok juga dipengaruhi oleh semua kelompok secara keseluruhan.

V. KESIMPULAN

Dengan mengasumsikan klaim aggregate masing-masing kelompok saling bebas dan berdistribusi compound Poisson, dan besarnya klaim berdistribusi eksponensial diperoleh bahwa estimasi risk premium masing-masing kelompok asuransi kumpulan dominan dipengaruhi oleh kelompoknya sendiri.

VI. DAFTAR PUSTAKA

Bowers, Newton L., 1997., *Actuarial Mathematics,* The Society of Actuaries, Schaumburg, Illinois.

Kaas, Rob., Marc Goovaerts, Jan Dhaene, and Michel Denuit., 2001, *ModernActuarial Risk Theory,* Kluwer Academic Publishers.

London, Dick., 1988, *Survival Models and Their Estimation,* Third Edition, ACTEX Publication