Penentuan Momen ke-5 dari Distribusi Gamma

ROBINSON SITEPU, PUTRA B.J. BANGUN, DAN HERIYANTO

Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Sriwijaya, Indonesia

Intisari: Distribusi Gamma mempunyai peranan yang sangat penting dalam teori antrian dan teori keandalan (reliabilitas). Distribusi gamma memiliki grafik yang disebut kurva tak beraturan, yang menggambarkan ketidaknormalan dalam sebarannya. Pada distribusi yang mempunyai kurva tak beraturan, sangat penting untuk diketahui besarnya *koefisien Skewness* dan *koefisien Kurtosis,* sehingga diperlukan adanya momen ketiga dan momen keempat. Sedangkan momen kelima, dapat digunakanuntuk mencari besarnya *koefisien Skewness* yang lebih akurat. Menurut Walpole, kegunaan yang jelas dari fungsi pembangkit momen ialah untuk menentukan momen distribusi. Jika diketahui fungi pembangkit momen suatu peubah acak, maka dapat ditentukan momen-momennya, yaitu dengan menurunkan fungsi pembangkit momen hingga n kali. Fungsi pembangkit momen distribusi gamma didefinisikan sebagai $M(t) = \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha}}$. Untuk mendapatkan momen ke-5, maka fungsi pembangkit momen tersebut diturunkan sebanyak 5 kali, sehingga mendapatkan momen pertama sampai momen ke-5 yaitu $\alpha\beta$; $\alpha\beta^2; 2\alpha\beta^3; 3\alpha^2\beta^4 + 6\alpha\beta^4$ dan $20\alpha^2\beta^5 + 24\alpha\beta^5$. Momen ke-3 dan ke-5 digunakan untuk mencari nilai *koefisien Skewness,* yaitu $\gamma_3 = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$ dan $\gamma_5 = \frac{20}{\sqrt{\alpha}} + \frac{24}{\alpha\sqrt{\alpha}}$. Sedangkan momen ke-4 digunakan untuk mencari nilai *koefisien Kurtosis,* yaitu $\gamma_4 = \frac{6}{\alpha} + 3$.

Kata-kunci: distribusi gamma, momen, *koefisien skewness, koefisien kurtosis*

Abstract: The gamma distribution has very important role in queue theory and reliability. Distribution of gamma has graphic called irreguler curve, shows the abnormal in yhe distribution. At distribution which has irreguler curve, it is very important to know the value of Skewness and Kurtosis coefficients, therefore the third and the fourth moments are needed. Whereas, the fifth moment, can be used to finds the value of Skewness coefficient accurately. According to Walpole, the use of the function of moment-generating of random of variabel is known, so the moments can be found, that is by differential the function of moment-generating to n times. Function of moment-generating gamma distribution defined as $M(t) = \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha}}$. Therefore to gain the fifth moment, the function is differentiated five times, than the first moment to fifith moment are found, those are $\alpha\beta$; $\alpha\beta^2; 2\alpha\beta^3; 3\alpha^2\beta^4 + 6\alpha\beta^4$ and $20\alpha^2\beta^5 + 24\alpha\beta^5$. The third and the fifith moment are used to find Skewness coefficient value those are $\gamma_3 = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$ and $\gamma_5 = \frac{20}{\sqrt{\alpha}} + \frac{24}{\alpha\sqrt{\alpha}}$. Otherwise, the fourth moment is used to find Kurtosis coefficient value, that is $\gamma_4 = \frac{6}{\alpha} + 3$.

Keywords: gamma distribution, moment, skewness coefficient, kurtosis coefficient

1 PENDAHULUAN

Penentuan momen pertama dan momen kedua sangat diperlukan dalam distribusi normal, karena distribusi normal memiliki grafik yang disebut kurva normal, yang berbentuk lonceng. Sedangkan pada distribusi gamma memiliki grafik yang disebut kurva tak beraturan, yang menggambarkan ketidaknormalan, sehingga tidak cukup hanya menentukan momen pertama dan momen kedua saja.

Pada distribusi yang mempunyai kurva tak beraturan, sangat penting untuk diketahui besarnya *koefisien Skewness* dan *koefisien Kurtosis,* sehingga diperlukan adanya momen ketiga dan momen keempat. Sedangkan momen kelima, dapat digunakan untuk mencari besarnya *koefisien Skewness* yang lebih akurat.

Untuk mencari momen suatu distribusi, sangat diperlukan adanya fungsi yang disebut fungsi pembangkit momen. Jika diketahui fungsi pembangkit momen suatu peubah acak, maka dapat ditentukan momen-momennya, yaitu dengan menurunkan fungsi pembangkit momen hingga n kali, dengan momen pertama disebut mean dan momen kedua disebut variansi.

2 TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Peubah Acak dan Distribusinya

Peubah Acak

Peubah acak dilambangkan dengan huruf kapital X dan huruf kecilnya dalam hal ini x, untuk menyatakan salah satu diantara nilai-nilainya [1].

Definisi 2.1:
Peubah acak adalah suatu fungsi yang mengaitkan sebuah bilangan real dengan setiap unsur di dalam ruang contoh[5]. Peubah acak diklasifikasikan menjadi 2 macam, yaitu peubah acak diskret dan peubah acak kontinu.

Distribusi Peubah Acak

Distribusi peubah acak diklasifikasikan menjadi 2 macam, yaitu distribusi peubah acak diskret dan distribusi peubah acak kontinu.

a. Distribusi Peubah Acak Diskret

Pada peubah acak diskret, setiap nilainya dapat dikaitkan dengan *probabilitas*. Himpunan pasangan yang berurutan $(x, f(x))$ disebut distribusi probabilitas peubah acak X [6].

Fungsi distribusi peubah acak diskret dapat dinyatakan sebagai :

$$F(x) = \sum_{x \in X} f(x) \tag{2.1}$$

dengan *f(x)* adalah suatu funsi *probabilitas* jika dan hanya jika :

1. $f(x) \geq 0$ untuk semua x
2. $\sum_{x \in X} f(x) = 1$ (2.2)

b. Distribusi Peubah Acak Kontinu

Distribusi *probabilitas* peubah acak kontinu tidak dapat dinyatakan dalam bentuk tabel, akan tetapi distribusinya dapat dinyatakan dalam persamaan yang merupakan fungsi nilai-nilai peubah acak kontinu dan dapat digambarkan dalam bentuk kurva[6].

Fungsi distribusi peubah acak kontinu dapat dinyatakan sebagai :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \tag{2.3}$$

dengan f(x) adalah fungsi probabilitas jika dan hanya jika [2]:

1. $f(x) \geq 0$ untuk semua x
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (2.4)

2.2 Distribusi Gamma

Definisi 2.2:

Jika α suatu bilangan real sebarang dengan $\alpha > 0$, fungsi gamma adalah :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx \tag{2.5}$$

Definisi 2.3:

Jika X suatu peubah acak kontinu, dengan $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$ maka fungsi *probabilitas* dari distribusi gamma diberikan oleh [5]:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} & ; x > 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Teorema 2.1:

Jika *f(x)* adalah fungsi *probabilitas*, maka fungsi pembangkit momen distribusi gamma adalah [4]:

$$M(t) = \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha}} \tag{2.7}$$

2.3 Ekspektasi dan Varians

Nilai Harapan (Ekspektasi)

Definisi 2.4:

Jika X adalah suatu peubah acak diskrit dan *f(x)* adalah fungsi *probabilitas* dari X, maka nilai harapan (ekspektasi) dari peubah acak X adalah :

$$E(X) = \sum_{x \in X} x f(x) \tag{2.8}$$

Definisi 2.5:

Jika X adalah suatu peubah acak kontinu dan $f(x)$ adalah suatu funsi probabilitas dari X maka nilai harapan (ekspektasi) dari peubah acak X adalah [4]:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \tag{2.9}$$

Definisi 2.6:

Misalkan X suatu peubah acak dengan fungsi probabilitas $f(x)$ dan $g(x)$ maka nilai harapan (ekspektasi) dari X adalah [1] :

$E(g(X)) = \sum_{x \in X} g(x) f(x)$; untuk X diskret (2.10)

$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$; untuk X kontinu (2.11)

Teorema 2.2:

Jika a dan b konstanta, maka [1]

$$E(aX + b) = aE(X) + b \tag{2.12}$$

Variansi

Variansi peubah acak X dibagi menjadi 2 macam yaitu variansi peubah acak diskret dan variansi peubah acak kontinu.

Definisi 2.7:

Misalkan X peubah acak dengan distribusi peluang f(x) dan rataan μ , variansi X adalah :

Jika X diskret

$$\sigma^2 = E((X-\mu)^2) = \sum_{x \in X} (x-\mu)^2 f(x) \qquad (2.13)$$

Jika X kontinu

$$\sigma^2 = E((X-\mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx \quad (2.14)$$

Teorema 2.4:

Jika variansi X dilambangkan dengan Var (X), maka[1]

$$Var\,(X) = E(X^2) - \mu^2 \qquad (2.15)$$

Teorema 2.5:[2]

$$Var\,(aX+b) = a^2\, Var(X) \qquad (2.16)$$

2.4 Momen dan Fungsi Pembangkit Momen

Momen

Definisi 2.8:

Misalkan X suatu peubah acak dengan fungsi distribusi F(x). Momen tak terpusat ke n dari X adalah [2].

$$\mu_n = E(X^n)$$

Definisi 2.9:

Misalkan X suatu peubah dengan fungsi distribusi F(x). Momen pusat ke n dari X adalah $\mu_n = E((X-\mu)^n)$[2].

Definisi 2.10:

Momen tak terpusat (μ_1) pertama disebut mean suatu distribusi dari X dan dinotasikan dengan μ .

Definisi 2.11:

Momen pusat kedua $\mu_2 = E((X-\mu)^2)$ disebut variansi suatu distribusi dari X dan dinotasikan dengan σ^2 [3].

Fungsi Pembangkit Momen

Definisi 2.12:

Fungsi pembangkit momen dari suatu peubah acak X didefinisikan untuk setiap bilangan real t sebagai $M(t) = E(e^{tx})$ [2].

Teorema 2.6:

Bila fungsi pembangkit momen M(t) dari peubah acak X ada untuk $|t| \le T$, untuk $T > 0$, maka $E(X^n)$ ada (n = 1,2,3,...) dan

$$E(X^n) = M^{(n)}(0) = \frac{d^n}{dt^n} M(t)\Big|_{t=0}$$

3 METODOLOGI PENELITIAN

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Membuktikan rumus momen ke-n.
2. Membuktikan rumus fungsi pembangkit momen distribusi gamma.
3. Menentukan momen ke-5.
4. Menentukan *koefisien Skewness* dan *koefisien Kurtosis*.
5. Membuat kesimpulan.

4 HASIL DAN PEMBAHASAN

Momen-momen distribusi peubah acak kontinu dapat diperoleh dengan menggunakan rumus (2.15) dan (2.16) dan dengan cara menurunkan fungsi pembangkit momen dari distribusi tersebut.

4.1 Membuktikan Rumus Momen ke-n

Berdasarkan Teorema 2.6 dan menggunakan deret Maclaurin $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \cdots$ serta y diganti tX maka $e^{tX} = 1 + tX + \frac{tX^2}{2!} + \cdots$ sehingga:

$$\begin{aligned} M(t) &= E(e^{tX}) = E(1 + tX + \frac{tX^2}{2!} + \cdots \\ &= E(1) + E(tX) + E(\frac{tX^2}{2!}) + \cdots \\ &= 1 + t\,E(X) + \frac{t^2}{2!}\,E(X^2) + \cdots + \frac{t^n}{n!} E(X^n) \end{aligned}$$

$$M'(t) = 0 + E(X) + t\,E(X^2) + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} E(X^n)$$

$$M'(0) = E(X) \text{ Momen ke} - 1 \text{ dari peubah acak } X$$

$$M''(t) = 0 + E(X^2) + t\,E(X^3) + \cdots$$

$$M''(0) = E(X^2) \quad \text{Momen ke} - 2 \text{ dari peubah acak } X$$

$$\vdots$$

$$M^{(n)}(0) = E(X^n) \text{ Momen ke} - \text{n dari peubah acak } X$$

$$E(X^n) = \frac{d^n}{dt^n} M_x(t)\Big|_{t=0}$$

4.2 Membuktikan Rumus Fungsi Pembangkit Momen Distribusi Gamma

Berdasarkan teorema 2.1 dan dengan menggunakan persamaan (2.6) dan definisi (2.12), maka dapat dibuktikan :

$$M(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} f(x)dx$$

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{\frac{-x}{\beta}+tX}\, dx$$

Misal : $y = \frac{x(1-\beta t)}{\beta}$; $x = \frac{\beta y}{(1-\beta t)}$; $dx = \frac{\beta}{1-\beta t}dy$

Sehingga:

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha}} y^{\alpha-1} e^{-y}\, dx$$

$$= \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha}}$$

4.3 Menentukan Momen ke-5

1. Momen pertama
   a. Momen tak terpusat

$$\mu_1 = E(X) = \frac{d}{dt} M(t)|_{t=0}$$

$$= \frac{d(1-\beta t)^{-\alpha}}{dt}|_{t=0}$$

$$= -\alpha(1-\beta t)^{-\alpha-1}(-\beta)|_{t=0}$$

$$= -\alpha(1-\beta.0)^{-(\alpha+1)}(-\beta) = \alpha\beta$$

Jadi, momen tak terpusat pertama adalah

$$\mu_1 = E(X) = \alpha\beta$$

2. Momen kedua
   a. Momen tak terpusat

$$\mu_2 = E(X^2) = \frac{d^2}{dt^2} M(t)|_{t=0}$$

$$= \frac{d^2(1-\beta t)^{-\alpha}}{dt^2}|_{t=0}$$

$$= -\alpha\big(-(\alpha+1)\big)(1-\beta t)^{-(\alpha+2)}(-\beta)^2|_{t=0}$$

$$= -\alpha\big(-(\alpha+1)\big)(1-\beta.0)^{-(\alpha+2)}(-\beta)^2$$

$$= -\alpha\big(-(\alpha+1)\big)\beta^2$$

$$= \alpha\beta^2(\alpha+1) = \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2$$

Jadi, momen tak terpusat kedua adalah

$$\mu_2 = E(X^2) = \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2$$

   b. Momen pusat

$$\mu_2 = E((X-\mu_1)^2)$$

$$= E(X^2 - 2\mu_1 X + {\mu_1}^2)$$

$$= E(X^2) - 2\mu_1 E(X) + {\mu_1}^2$$

$$= \mu_2 - 2{\mu_1}^2 + {\mu_1}^2$$

$$= \mu_2 - {\mu_1}^2$$

$$= \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2 - (\alpha\beta)^2$$

$$= \alpha\beta^2$$

Jadi, momen pusat kedua adalah

$$\mu_2 = E((X-\mu_1)^2) = \sigma^2 = \alpha\beta^2$$

3. Momen ketiga
   a. Momen tak terpusat

$$\mu_3 = E(X^3)$$

$$= \frac{d^3}{dt^3} M(t)|_{t=0} = \frac{d^3(1-\beta t)^{-\alpha}}{dt^3}|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(-\alpha\big(-(\alpha+1)\big)(1-\beta t)^{-(\alpha+3)}(-\beta)^3\right)|_{t=0}$$

$$= -\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(1-\beta.0)^{-(\alpha+3)}(-\beta)^3$$

$$= (\alpha\beta^3)(\alpha^2 + 3\alpha + 2)$$

$$= \alpha^3\beta^3 + 3\alpha^2\beta^3 + 2\alpha\beta^3$$

Jadi, momen tak terpusat ketiga adalah

$$\mu_3 = E(X^3) = \alpha^3\beta^3 + 3\alpha^2\beta^3 + 2\alpha\beta^3$$

   b. Momen pusat

$$\mu_3 = E((X-\mu_1)^3)$$

$$= E((X^2 - 2\mu_1 X + {\mu_1}^2)(X-\mu_1))$$

$$= E(X^3 - 3\mu_1 X^2 + 3{\mu_1}^2 X - {\mu_1}^3)$$

$$= E(X^3) - 3\mu_1 E(X^2) + 3{\mu_1}^2 E(X) - {\mu_1}^3$$

$$= \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2{\mu_1}^3$$

$$= \alpha^3\beta^3 + 3\alpha^2\beta^3 + 2\alpha\beta^3 - 3\alpha^3\beta^3 - 3\alpha^2\beta^3 + 2\alpha^2\beta^3$$

$$= 2\alpha\beta^3$$

Jadi, momen pusat ketiga adalah

$$\mu_3 = E((X-\mu_1)^3) = 2\alpha\beta^3$$

4. Momen keempat
   a. Momen tak terpusat

$$\mu_4 = E(X^4) = \frac{d^4}{dt^4} M(t)|_{t=0}$$

$$= \frac{d^4(1-\beta t)^{-\alpha}}{dt^4}|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}(-\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(1-\beta.0)^{-(\alpha+3)}(-\beta)^3)|_{t=0}$$

$$= -\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(-(\alpha+3))(1-\beta t)^{-(\alpha+4)}(-\beta)^4|_{t=0}$$

$$= (-\alpha\beta^4)(\alpha+1)(\alpha+2)(-(\alpha+3))$$

$$= \alpha^4\beta^4 + 6\alpha^3\beta^4 + 11\alpha^2\beta^4 + 6\alpha\beta^4$$

Jadi, momen tak terpusat keempat adalah

$$\mu_4 = E(X^4) = \alpha^4\beta^4 + 6\alpha^3\beta^4 + 11\alpha^2\beta^4 + 6\alpha\beta^4$$

b. Momen pusat

$$\mu_4 = E((X-\mu_1)^4)$$

$$= E((X^3 - 3\mu_1 X^2 + 3{\mu_1}^2 X - {\mu_1}^3)(X-\mu_1)$$

$$= E(X^4 - 4\mu_1 X^3 + 6{\mu_1}^2 X^2 - 4{\mu_1}^3 X + {\mu_1}^4)$$

$$= \mu_4 - 4\mu_1\mu_3 + 6{\mu_1}^2\mu_2 - 3{\mu_1}^4$$

$$= \alpha^4\beta^4 + 6\alpha^3\beta^4 + 11\alpha^2\beta^4 + 6\alpha\beta^4 - 4\alpha^4\beta^4$$
$$-12\alpha^3\beta^4 - 8\alpha^2\beta^4 + 6\alpha^4\beta^4 + 6\alpha^3\beta^4 - 3\alpha^4\beta^4$$

$$= 3\alpha^2\beta^4 + 6\alpha\beta^4$$

Jadi, momen pusat keempat adalah:

$$\mu_4 = E((X-\mu_1)^4) = 3\alpha^2\beta^4 + 6\alpha\beta^4$$

5. Momen kelima

a. Momen tak terpusat

$$\mu_5 = E(X^5) = \frac{d^5}{dt^5} M(t)|_{t=0} = \frac{d^5(1-\beta t)^{-\alpha}}{dt^5}|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}(-\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(-(\alpha+3))(1-\beta t)^{-(\alpha+4)}(-\beta)^4)|_{t=0}$$

$$= -\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\big(-(\alpha+3)\big)\big(-(\alpha+4)\big)(1-\beta t)^{-(\alpha+5)}(-\beta)^5|_{t=0}$$

$$= -\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)(1-\beta.0)^{-(\alpha+5)}(-\beta)^5$$

$$= (\alpha\beta^5)(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)$$

$$= \alpha^5\beta^5 + 10\alpha^4\beta^5 + 35\alpha^3\beta^5 + 50\alpha^2\beta^5 + 24\alpha\beta^5$$

Jadi, momen tak terpusat kelima adalah:

$$\mu_5 = E(X^5)$$
$$= \alpha^5\beta^5 + 10\alpha^4\beta^5 + 35\alpha^3\beta^5 + 50\alpha^2\beta^5 + 24\alpha\beta^5$$

b. Momen pusat

$$\mu_5 = E((X-\mu_1)^5)$$

$$= E((X^4 - 4\mu_1 X^3 + 6{\mu_1}^2 X^2 - 4{\mu_1}^3 X + {\mu_1}^4)(X-\mu_1))$$

$$= E(X^5 - 5\mu_1 X^4 + 10{\mu_1}^2 X^3 - 10{\mu_1}^3 X^2 + 5{\mu_1}^4 X + {\mu_1}^5)$$

$$= \mu_5 - 5\mu_1\mu_4 + 10{\mu_1}^2\mu_3 - 10{\mu_1}^3\mu_2 + 4{\mu_1}^5$$

$$= \alpha^5\beta^5 + 10\alpha^4\beta^5 + 35\alpha^3\beta^5 + 50\alpha^2\beta^5 + 24\alpha\beta^5 - 5\alpha^5\beta^5 - 30\alpha^4\beta^5 - 55\alpha^3\beta^5 - 30\alpha^2\beta^5 + 10\alpha^5\beta^5 + 30\alpha^4\beta^5$$

$$= 20\alpha^2\beta^5 + 24\alpha\beta^5$$

Jadi, momen pusat kelima adalah

$$\mu_5 = E((X-\mu_1)^5) = 20\alpha^2\beta^5 + 24\alpha\beta^5$$

4.4 Menentukan Koefisien Skewness dan Koefisien Kurtosis

Koefisien Skewness

$$\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

$$\gamma_3 = \frac{E((X-\mu)^3)}{\sigma^3} = \frac{2\alpha\beta^3}{\alpha\beta^2\sqrt{\alpha\beta^2}}$$

$$\gamma_3 = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

Jika menggunakan momen pusat ke-5 maka didapat nilai *koefisien Skewness* yang lebih akurat.

$$\gamma_5 = \frac{\mu_5}{\sigma^5}$$

$$\gamma_5 = \frac{E((X-\mu)^5)}{\sigma^5} = \frac{20\alpha^2\beta^5 + 24\alpha\beta^5}{\alpha\beta^2\alpha\beta^2\sqrt{\alpha\beta^2}}$$

$$\gamma_5 = \frac{20}{\sqrt{\alpha}} + \frac{24}{\alpha\sqrt{\alpha}}$$

Nilai *koefisien Skewness* digunakan untuk mengetahui jenis *skewness* kurva distribusi gamma dengan berdasarkan kriteria sebagai berikut:

a. $\gamma_3 > 0$: sebaran menjulur positif atau menjulur ke kanan.

b. $\gamma_3 = 0$: sebaran normal (simetrik).

c. $\gamma_3 < 0$: sebaran menjulur negatif atau menjulur ke kiri.

Koefisien Kurtosis

$$\gamma_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

$$\gamma_4 = \frac{E((X-\mu)^4)}{\sigma^4} = \frac{3\alpha^2\beta^4 + 6\alpha\beta^4}{\alpha\beta^2\alpha\beta^2}$$

$$\gamma_4 = \frac{6}{\alpha} + 3$$

Nilai *koefisien Kurtosis* digunakan untuk mengetahui kelandaian suatu kurva dengan kriteria sebagai berikut:

a. $\gamma_4 > 0$: sebaran kurva leptokurtik, yaitu kurva yang mempunyai puncak relatif tinggi atau runcing.

b. $\gamma_4 = 0$: sebaran kurva mesokurtik, yaitu mempunyai puncak ceper atau rata-rata.

c. $\gamma_4 < 0$: sebaran kurva platikurtik, yaitu kurva yang mempunyai puncak tidak terlalu runcing.

5 KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa:

1. Momen pusat ke-5 dari distribusi gamma didapatkan dengan menurunkan fungsi pembangkit momen sebanyak lima kali, sehingga diperoleh:

$$\mu_5 = ((X - \mu_1)^5) = 20\alpha^2\beta^5 + 24\alpha\beta^5$$

2. Nilai *koefisien Skewness* digunakan untuk mengetahui jenis kemencengan suatu kurva, didapat *koefisien Skewness* distribusi gamma sebagai berikut :

$\gamma_3 = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$ dan $\gamma_5 = \frac{20}{\sqrt{\alpha}} + \frac{24}{\alpha\sqrt{\alpha}}$

Sedangkan *koefisien Kurtosis* digunakan untuk mengetahui jenis pemuncakan suatu kurva, didapat *koefisien Kurtosis* distribusi gamma sebagai berikut : $\gamma_4 = \frac{6}{\alpha} + 3$

Saran

1. Selain distribusi gamma, penentuan momen juga dapat dilakukan pada distribusi peubah acak kontinu lain, seperti distribusi beta dan distribusi weibull.
2. Secara umum peubah acak dapat dibedakan menjadi dua, yaitu peubah acak diskret dan peubah acak kontinu. Oleh karena itu, disarankan lebih lanjut tentang penentuan momen pada peubah acak diskret.

REFERENSI

[1] Bain, L. dan Max, E., 1992, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics,* PWS KENT, United States of America

[2] Dudewiez, Edward J. dan Mishra, S., 1995, *Statistika Matematika Modern,* ITB Bandung, Bandung

[3] Freund, J. dan Richard, W, 1987, *Mathematical Statistics,* Prentice-Hall, United States of America

[4] Hogg, R. dan Allen T, 1995, *Introduction to Mathematical Statistics,* Prentice-Hall, United States of America

[5] Walpole, R., dan Raymond H, 1995, *Ilmu Peluang dan Statistika Untuk Insinyur dan Ilmuwan,* ITB Bandung, Bandung

[6] Wibisono, Yusuf, 2005, *Metode Statistika,* Gajah Mada University, Yogyakarta